БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

12

Д. Н. АРТЕМЬЕВ

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

КРИСТАЛЛ И ЕГО СИММЕТРИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ
12

D. N. Artemjeff,

Д. Н. АРТЕМЬЕВ
ПРОФ. МОСКОВСК. ГОС. УНИВ.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Kristallographie

Bd. 1

ТОМ ПЕРВЫЙ

КРИСТАЛЛ И ЕГО СИММЕТРИЯ

Der Kristall und seine Symmetrie.

1 9 2 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН
Berlin

Лейпциг, Типография Б. Г. Тейбнера.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1. КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ ВЕЩЕСТВО.

Все явления природы, доступные наблюдению человека, совершаются внутри некоторых материальных тел. Всякое материальное тело можно исследовать с различных точек зрения. В зависимости от того, с какой точки зрения произведено исследование ряда различных материальных тел, получается определенная группировка данного ряда об'ектов исследования. В виду этого, один и тот же ряд материальных об'ектов может быть разделен на различные группы в зависимости от того, какие приняты признаки различия между телами исследуемого ряда. Установление признаков различия между группами принятой классификации зависит в свою очередь от той точки зрения, с которой производится исследование материальных тел.

Исследование материальных тел с точки зрения их состава, приводящее к разложению данного тела на качественно различные составные части, служит предметом изучения химии. Исследование материальных тел с точки зрения их некоторых физических свойств, а именно об'ема, формы и сопротивления механическим воздействиям, приводит к учению о так называемых аггрегатных состояниях вещества, причем изучение таких состояний относится к области физики.

В физике, как известно, различаются три аггрегатных состояния вещества: 1) газообразное, 2) жидкое и 3) твердое. Все эти состояния могут быть определены на основании различия в об'еме, форме и подвижности данного вещества.

Если данное вещество не имеет определенного об'ема и формы и обладает высокой степенью подвижности, то такое вещество называется газом. Об'ем газа в точности равен

об'ему того сосуда, в котором он помещается. Если устранить содержащий газ сосуд, то газ, в виду своей подвижности, будет стремиться занять неограниченно большой об'ем.

Жидким называется такое состояние вещества, при котором это вещество занимает определенный об'ем, но не имеет определенной формы. В виду этого жидкость, налитая в некоторый сосуд, принимает форму этого сосуда, сохраняя определенный, постоянный при данных условиях об'ем, вне зависимости от формы сосуда, в котором она находится. Жидкость обладает, вообще говоря, гораздо меньшей подвижностью по сравнению с газом и на поверхности разграничения данной жидкости и окружающей ее среды развиваются особые силы поверхностного натяжения. Поверхность жидкости, имеющей меньший об'ем, по сравнению с об'емом содержащего ее сосуда, в спокойном состоянии является в большей своей части, при достаточно большом сосуде, поверхностью уровня данной местности.

Твердым называется такое состояние вещества, при котором данное вещество сохраняет не только постоянный об'ем, но и постоянную форму, не зависящую от формы окружающей среды. Таким образом, поверхность твердого тела является постоянной при определенных условиях и сама определяет границу данного твердого вещества.

Каждое данное вещество, вне зависимости от его состояния, можно рассматривать как некоторую среду, в которой происходят те или другие явления. Если рассматривать данное материальное тело как некоторую среду, то для характеристики данной среды необходимо знать ее физические свойства. Так как эти свойства находятся в непосредственной зависимости от внутреннего строения данной среды, то всегда возможно определить свойства среды, зная ее структуру и наоборот.

Таким образом, мы можем рассматривать и классифицировать материальные тела с точки зрения их внутреннего строения и вызываемых им определенных свойств. Рассматривая данное физическое тело как определенную среду, необходимо ввести понятие об однородности или неоднородности данной среды.

Различаются два вида однородности: химическая и физическая. Химически-однородным веществом, или химически-однородной средой, называется такое вещество, которое имеет во всех своих частях один и тот же химический состав. Физически-однородным веществом называется такое химически-однородное вещество, которое во всех своих частях имеет одинаковые физические свойства в параллельных направлениях. Возьмем внутри данного физически-однородного вещества какую-нибудь точку *a* и будем производить исследование проявления какого-нибудь определенного физического свойства, принимая точку *a* за исходный пункт для такого исследования. Исходя из точки *a*, мы можем произвести исследование данного физического свойства по самым разнообразным направлениям и получить соответственные величины, выражающие данное физическое свойство. Если такие величины будут совершенно одинаковы, вне зависимости от того, по какому направлению мы исследуем данное физическое свойство, то мы будем иметь дело с веществом „изотропным“ для данного физического свойства. Если же выражение данного физического свойства будет меняться в зависимости от того, по какому направлению мы исследуем взятое нами вещество, то это вещество будет „анизотропным“ для данного физического свойства.

Физически-однородные вещества, изотропные по отношению ко всем физическим свойствам, называются гомогенными изотропными веществами. Если физически-однородное вещество анизотропно по отношению к какому-нибудь физическому свойству, то такое вещество носит название гомогенного анизотропного вещества. Гомогенное анизотропное вещество называется также кристаллическим веществом, а гомогенная анизотропия иногда получает название кристаллической однородности.

Анизотропия кристаллического вещества может проявляться или по отношению ко всем или только к некоторым физическим свойствам. Вообще говоря, кристаллическое вещество может быть изотропным по отношению к целой группе физических свойств, но не может существовать кристалла, который был бы действительно изотропным по отношению ко всем

физическим свойствам. Можно задать себе вопрос: каким образом согласовать понятие об однородности вещества с его анизотропией. В самом деле, по приведенному выше определению гомогенное однородное вещество должно проявлять одинаковые свойства в каждой своей части, а в то же время в анизотропном веществе физические свойства меняются в зависимости от направления. Для того, чтобы оба эти явления, т. е. анизотропия и однородность, могли существовать совместно, необходимо, чтобы в гомогенном анизотропном веществе проявление каждого физического свойства в параллельных направлениях было одинаково. Таким образом, если мы возьмем внутри кристаллического вещества две точки a и a_1 (рис. 1) то, исследуя какое-нибудь физическое свойство по направлению ab и a_1b_1, найдем совершенно одинаковые выражения этого свойства, если только ab параллельно a_1b_1.

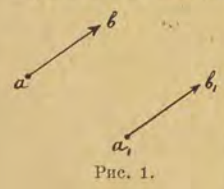


Рис. 1.

Если мы изобразим каждую величину, выражающую данное физическое свойство по определенному направлению ab, некоторым отрезком прямой ab, то, приняв за исходный пункт точку a и исследуя определенное физическое свойство в различных направлениях, мы получим пучек отрезков прямых различных длин, причем каждый такой отрезок будет иметь начало в точке a. Такие отрезки, выражающие определенные свойства и имеющие определенную величину и направление, называются векторами. Каждый вектор имеет начальную и конечную точку, причем в нашем примере начальной точкой для всех векторов будет точка a. Соединив конечные точки всех векторов, получим некоторую поверхность, выражающую проявление данного физического свойства в исследуемом веществе.

Если исследуемое вещество изотропно, то всякая поверхность, взятая для какого угодно физического свойства, будет шаром. В анизотропных веществах подобные поверхности, построенные путем соединения концов векторов, уже не будут шарами, а будут представлять собою некоторую поверхность того или друго вида в зависимости от того, какое физическое свойство было взято для исследования. В виду

этого, различные направления, или векторы, в гомогенном анизотропном веществе, вообще говоря, уже не будут одинаковы. Таким образом, мы можем сказать, что каждое гомогенное анизотропное вещество обладает векториальным строением, подразумевая под этим то, что в таком веществе всегда можно отличить друг от друга различные направления, на основании исследования определенных физичиских свойств данного вещества.

Это основное положение есть общее выражение тех фактических данных, которые имеются в нашем распоряжении. Мы пока только констатируем общий факт, характеризующий каждое кристаллическое вещество, которое всегда однородно и анизотропно по отношению хотя бы к некоторым физическим свойствам.

На основании принятой в настоящее время атомистической теории строения вещества необходимо признать, что каждое материальное тело состоит из мельчайших частиц-атомов, находящихся на некоторых расстояниях друг от друга. Эти расстояния, или так называемые междуатомные промежутки, во много раз превышают размеры самих атомов.

Совершенно не входя в рассмотрение того, как построены атомы и что они собою представляют, можно принять каждый атом за материальную точку и, сделав такое допущение, получить целый ряд выводов, находящихся в полном согласии с наблюдаемыми фактами. Прежде всего, из атомистической теории мы можем сделать тот вывод, что внутри каждого материального тела имеются по существу совершенно различные участки: материальные точки-атомы и междуатомные промежутки. Кроме того, если данное вещество состоит из различных атомов, соединенных друг с другом в молекулы, то мы можем различать внутри и вне-молекулярные участки данной материальной среды.

Таким образом, на основании самой сущности атомистической теории можно утверждать, что такого материального тела, которое имело бы полную однородность во всех точках вообще существовать не может. Однако, в виду чрезвычайно малых размеров расстояний между атомами мы практически можем рассматривать данное материальное тело как одно-

родную среду, если только это тело удовлетворяет приведенным выше условиям химической или физической однородности.

Если отдельные молекулы данного тела настолько мало связаны друг с другом, что их взаимное расположение может быть самым различным, то мы, вообще говоря, практически получаем все свойства, характеризующие гомогенное изотропное вещество, так как анизотропия отдельных мельчайших участков такого вещества не может быть констатирована обычными методами исследования. Таким образом, гомогенное изотропное вещество, с точки зрения его строения, будет иметь беспорядочное распределение твердых частиц. Если же взаимное расположение твердых частиц в данном теле будет иметь определенный строгий порядок, то внутренняя анизотропия среды должна будет так или иначе проявиться при исследовании того или другого физического свойства и мы получим ясно выраженную гомогенную анизотропную среду, или кристаллическое вещество. Так как анизотропия проявляется главным образом в твердых телах, то, вообще, кристаллическим индивидуумом или кристаллом будет всякое твердое гомогенное анизотропное тело, обладающее кристаллической однородностью и выделяющееся из жидкой или газообразной среды в виде выпуклого многогранника определенной формы, не зависящей от формы окружающей среды.

Название кристалл происходит от греческого слова *κρύσταλλος*. Это слово впервые встречается у Гомера, причем у него оно обозначает железо. Позднее Платон начал применять название кристалл к очен распространенному минералу кварцу или горному хрусталю. Самое слово „хрусталь“ тоже представляет собою испорченное греческое — кристалл. В средние века, начиная с Альберта Магнуса († 1280 г.), кристаллами стали называть минералы, имеющие определенную природную форму. И. Кеплер (1571—1630) называл кристаллами твердые вещества, имеющие природную форму, напоминающую правильный многогранник. Таким образом, обращаясь к истории, мы видим постепенную эволюцию значения слова кристалл, вплоть до современного понятия о кристалле, данного выше.

2. ПРЕДМЕТ ИЗУЧЕНИЯ КРИСТАЛЛОГРАФИИ.

Кристаллография есть наука, занимающаяся изучением физических свойств кристаллического вещества и исследованием его внутреннего строения. В виду этого, кристаллографию можно рассматривать как часть физики. Выделение этой части физики в особую научную дисциплину вполне рационально в виду того, что самые об'екты кристаллографии — кристаллы требуют своеобразных методов исследования, а те закономерности, которые установлены этой наукой, имеют совершенно специальный характер. Впрочем, благодаря историческому ходу развития кристаллографии, ее связь с физикой никогда не была установлена прочно, в виду того, что до самого последнего времени кристаллография имела самую тесную связь с минералогией. Такая связь будет вполне понятна, если только принять во внимание, что каждому минералогу знание кристаллографии совершенно необходимо. В самом деле, почти каждый минерал, образовавшись в виде определенного физического индивидуума, представляет собою кристаллическое вещество, а изучением кристаллического вещества и занимается кристаллография. Греческое слово „кристаллография“ обозначает собственно описание кристаллов, т. е. некоторую область знания, которая должна бы содержать в себе описание различных кристаллических индивидуумов, или кристаллов. Как мы уже видели, в настоящее время кристаллография очень далеко отошла от такой описательной задачи и перешла в разряд наук точного, математически обоснованного характера. В виду этого, самое название „кристаллография“ имеет только историческое значение, указывая на содержание этой науки при ее возникновении. Для того, чтобы охарактеризовать современное содержание этой науки было бы гораздо правильнее назвать ее кристаллогнозией.

Кристаллография может быть разделена на две почти равные части: 1) Геометрическую или математическую кристаллографию и 2) Физическую кристаллографию. Геометрическая кристаллография занимается установлением тех закономерностей, которые могут быть обнаружены при исследовании

кристаллической однородности и внешней формы кристаллического индивидуума, а также изучением внутреннего строения кристаллического вещества. Физическая кристаллография занимается изучением проявления различных физических свойств (кроме внешней формы) в анизотропной гомогенной среде. Как только что было упомянуто, геометрическая кристаллография прежде всего занимается изучением внешней формы кристалла, или кристаллического индивидуума. Эта внешняя форма представляет собою определенный выпуклый многогранник, причем каждое данное кристаллическое вещество имеет особую, характерную для него внешнюю форму. Из этого факта мы можем заключить, что внешняя форма кристалла, образующегося в виде особого выпуклого многогранника не представляет собою чего-нибудь случайного. Эта форма служит совершенно определенным выражением тех внутренних свойств, которыми характеризуется данное кристаллическое вещество. В виду этого мы должны рассматривать кристаллический многогранник, как одно из физических явлений, тесно связанных с внутренним строением данного кристаллического вещества. Вообще, в каждом многограннике, как в чисто геометрическом, так и в кристаллическом, мы можем различать разнородные его части, которые носят название элементов многогранника. Такими элементами будут: 1) плоскости ограничения — грани, 2) линии пересечения двух граней — ребра многогранника, 3) точки пересечения нескольких граней и ребер — вершины многогранника и, наконец, 4) угловые элементы — углы между гранями и углы между ребрами многогранника.

3. ЗАКОН ПОСТОЯНСТВА УГЛОВЫХ ОТНОШЕНИЙ.

В сочинении „De solido inter solidum naturaliter contento“, изданном во Флоренции в 1669 г., датский кристаллограф Николай Стенсен (Стенон) (1631—1686) впервые точно и определенно установил один из основных законов кристаллографии, а именно закон постоянства величин углов между гранями кристаллов одного и того же вещества. На основании этого закона во время роста кристалла углы кристал-

лического многогранника не меняются, несмотря на то, что размеры граней могут претерпевать самые различные изменения. Таким образом, кристаллические многогранники с различной величиной и формой плоскостей ограничения, но с одинаковыми углами между ними — по существу равнозначны.

Закон Стенона имеет чисто опытную основу. Он был выведен из целого ряда наблюдений и представляет собою простое обобщение известных фактов. Этот закон в то же время имеет исключительную важность для выяснения вопроса о природе и сущности кристаллического вещества, так как на основании закона Стенона мы можем установить те элементы кристаллического многогранника, которые являются для него постоянными и характерными. Эти элементы — углы. Таким образом, на основании закона Стенона мы можем каждый кристаллический многогранник преобразовать в равнозначный ему по существу многогранник, передвигая грани данного многогранника параллельно самим себе. При таком передвижении граней не будут меняться не только углы между гранями, но и углы между ребрами кристаллического многогранника. В самом деле, изменив углы между ребрами, мы непременно тем самым изменим углы между гранями и наоборот. Таким образом, закону постоянства гранных углов, открытому Стеноном, можно придать более общую форму и выразить его следующим образом:

Из всех величин, относящихся к элементам кристаллического многогранника, постоянными, характерными для данного вещества являются угловые соотношения, т. е. углы между однородными или разнородными элементами многогранника. Все линейные размеры элементов кристаллического многогранника, а также величина его поверхности и об'ем несущественны для характеристики данного вещества.

Попробуем отдать себе отчет в том, при каких условиях мог быть установлен закон Стенона, или, другими словами, постараемся выяснить те условия, при которых возможно было подметить найденную Стеноном закономерность. Если вдуматься в сущность закона Стенона, то мы легко увидим, что закон постоянства угловых отношений в кристаллическом многограннике предполагает существование совершенно определенного

цикла явлений, характеризующих кристаллы одного и того же вещества. В самом деле, для того, чтобы подметить установленную Стеноном закономерность, необходимо было иметь целый ряд кристаллов одинакового химического состава, обладающих одинаковыми угловыми соотношениями. Такое именно явление и наблюдается в действительности. Каждое химически индивидуальное вещество, образуя кристаллы, проявляет свойство давать одинаковые кристаллические многогранники, если только физические и химические факторы, действующие в той среде, где происходит процесс кристаллизации, т. е. образования и роста кристалла, не очень сильно отличаются при образовании различных кристаллических индивидуумов. Таким образом, при более или менее однообразных условиях кристаллизации, данное вещество выделится из определенной кристаллизационной среды в виде одного или нескольких кристаллических индивидуумов, представляющих собою кристаллы почти одинаковой формы, с одинаковым количеством граней и с одинаковыми угловыми соотношениями. Так как условия образования различных кристаллических индивидуумов в данной кристаллизационной среде все время должны меняться по самому существу процесса кристаллизации, то мы можем вывести заключение, что при этом процессе частичное изменение свойств среды имеет сравнительно небольшое влияние на получаемый результат, а главную роль играют те внутренние силы, которые действуют между частицами, образующими кристалл данного вещества.

Таким образом, из самой возможности установления закона Стенона мы можем заключить об одном чрезвычайно важном явлении, наблюдающемся в кристаллическом веществе. Это — определенное постоянство формы кристаллических многогранников одного и того же химического состава, выражающееся в том, что при более или менее близких условиях кристаллизации данное вещество выделяется в кристаллах с одними и теми же гранями.

На основании закона Стенона мы можем изменять внешний вид кристаллического многогранника путем передвижения его граней и ребер параллельно самим себе, нисколько не

нарушая строения такого многогранника (рис. 2). При параллельном перемещении граней и ребер мы в сущности будем производить то же самое, что происходит при росте кристалла. Это вполне сознавал и Стенон, который указал на характер образования и роста кристаллов путем послойного наложения частиц.

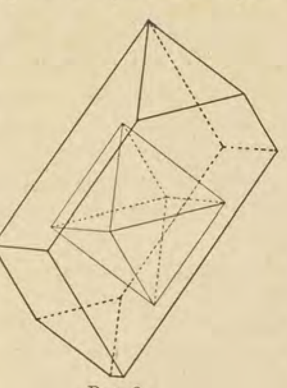


Рис. 2.

На основании возможности параллельного перемещения граней и ребер кристалла без нарушения его внутреннего строения, легко вывести одно чрезвычайно важное свойство кристаллических многогранников — возможность установления их симметричности в том случае, если в данном многограннике имеется два или несколько одинаковых углов между гранями или ребрами. Такие многогранники, имеющие равные угловые величины, могут быть вполне заменены идеальными геометрическими многогранниками с однообразным развитием равных друг другу граней. Если мы заменим реальный кристалл идеальным геометрическим многогранником с равномерным развитием равных частей, то после такой замены мы можем в некоторых случаях получить симметрический многогранник, причем для изучения таких многогранников нам необходимо будет ознакомиться с основными началами учения о симметрии, играющими чрезвычайно важную роль в геометрической кристаллографии

II. НАЧАЛА УЧЕНИЯ О СИММЕТРИИ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ В УЧЕНИИ О СИММЕТРИИ.

Для выяснения и развития начал учения о симметрии необходимо прежде всего самое строгое и точное установление самого понятия „симметрия“. В общежитии слово

симметрия употребляется для обозначения повторяемости некоторых предметов, расположенных в определенном порядке. Так, например, говорят о симметричной расстановке мебели, когда имеется несколько одинаковых предметов обстановки, расположенных более или менее одинаково по отношению к некоторым предметам. Таким образом, в обычном понимании, симметрия заключает в себе два представления: 1) представление о повторяемости одинаковых предметов и 2) представление об определенном расположении таких предметов. Если мы говорим о симметрии какого-нибудь предмета, то это обозначает, что данный предмет состоит из нескольких равных частей. Такое равенство частей предмета может заключаться или в том, что равные части данного пространственного тела можно непосредственно совместить друг с другом, или в том, что одна часть предмета совмещается с зеркальным изображением другой его части. Таким образом, в понятии о симметрии имеется двойственность, которую, впрочем, можно легко устранить, сделав более общее и точное определение самого понятия „симметрия".

Представим себе несколько совершенно одинаковых предметов, например, несколько одинаковых шаров, сделанных из одного и того же материала. Если число этих шаров будет $2n$, где n — некоторое целое число, то мы можем расположить все наши шары в двух группах, причем каждая такая группа будет содержать n шаров. Если мы отметим каждый шар первой группы особым значком и таким же значком отметим один из шаров второй группы, то каждому шару первой группы будет соответствовать один шар второй группы, отмеченный тем же значком. Таким образом, для каждого шара первой группы мы будем иметь только один соответственный ему шар во второй группе. Проделав такую операцию со всеми шарами, мы установим так называемое взаимно-однозначное соответствие между шарами первой и второй группы. Росположение соответственных шаров в двух группах может быть, вообще говоря, совершенно различно. Однако, мы можем расположить шары второй группы так, чтобы расстояние между какими угодно двумя шарами первой группы было бы равно расстоянию между соответствен-

ными им шарами второй группы. При таком расположении шаров мы получим две симметричные группы шаров (рис. 3).

Заменив каждый шар обоих групп его центральной точкой и сохранив между такими точками взаимно-однозначное соответствие, мы получим две взаимно симметричные системы точек или две системы точек, симметричные друг другу. Таким образом, две системы точек будут называться симметричными друг другу, если расстояние между двумя про-

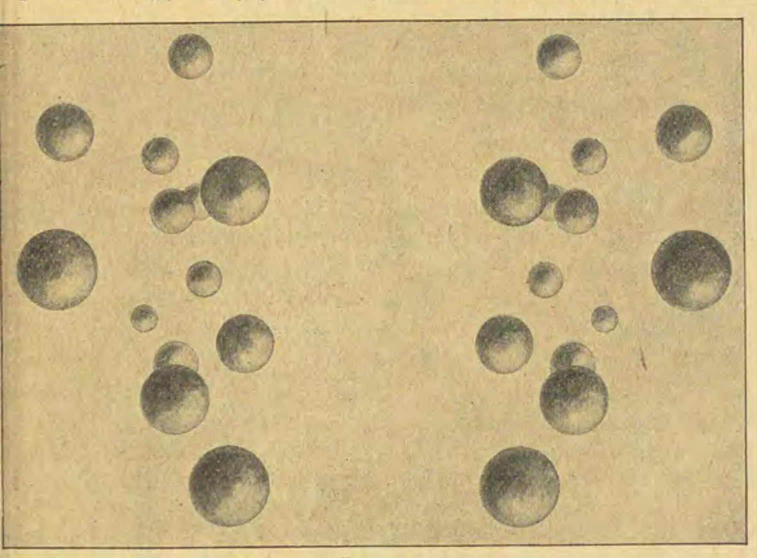


Рис. 3.

извольно взятыми точками одной системы будет равно расстоянию между соответственными им точками другой системы. Две симметричные друг другу системы точек могут быть или тождественны или не тождественны.

Тождественными системами мы будем называть такие две системы точек, которые обладают тем свойством, что все точки одной системы совмещаются с соответственными им точками другой системы при совмещении четырех, не лежащих в одной плоскости, точек одной системы с четырьмя соответственными им точками другой системы.

Приведенное выше определение двух симметричных и тождественных друг другу систем дает нам возможность вывести заключение, что каждые две тождественные друг другу системы точек должны быть в то же время признаны и взаимно симметричными. Кроме того, из определения условий

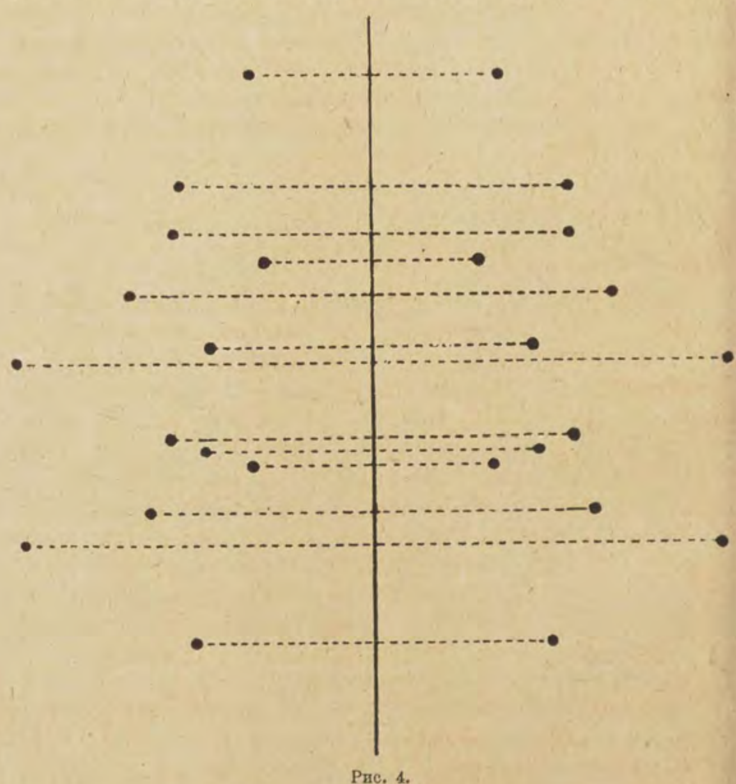


Рис. 4.

симметричности двух систем точек мы непосредственно выводим заключение о том, что этому определению будут удовлетворять две системы точек, из которых одна является зеркальным изображением другой. В самом деле, для построения зеркального изображения данной системы мы должны

опустить перпендикуляры из всех точек данной системы на зеркальную плоскость и продолжить эти перпендикуляры по другую сторону зеркала на расстояния, равные расстояниям изображаемых точек от зеркальной плоскости. Ясно, что при таком построении зеркального изображения, изображаемые точки будут находиться на тех же расстояниях друг от друга, как и их изображения. В то же время, данная система, отраженная в зеркальной плоскости, не будет тождественна с исходной системой, так как невозможно будет произвести совмещения четырех точек данной системы с соответственными им точками зеркального изображения (рис. 4).

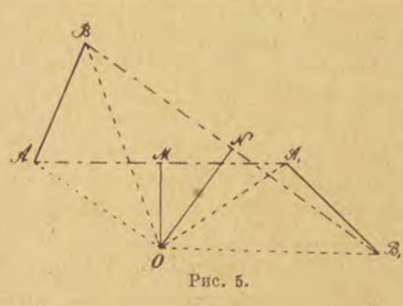
2. СОВМЕЩЕНИЕ ДВУХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ СИСТЕМ.

Как мы видели, в определение двух тождественных систем точек вводится представление о возможности совмещения двух таких систем друг с другом. Благодаря этому, при исследовании свойств симметрических систем необходимо иметь понятие о том, каким образом может быть произведено совмещение двух тождественных неизменяемых систем точек, занимающих различное положение в пространстве. Ясно, что решение вопроса о способах совмещения двух тождественных систем сводится к вопросу о перемещении неизменяемой системы точек.

Подобными вопросами занимается тот отдел теоретической механики, который носит название „кинематики“. Здесь мы остановимся на доказательстве нескольких теорем, которые нам будут необходимы для вывода общего положения о совмещении двух тождественных систем точек.

Положение I. Всякое перемещение неизменяемой системы точек, параллельно данной плоскости, может быть заменено одним вращением вокруг определенной оси, перпендикулярной к той плоскости, параллельно которой происходит перемещение системы. Если переместить неизменяемую систему точек параллельно данной плоскости, то изменение положения такой системы вполне определится изменением положения двух произвольно взятых точек системы, не лежащих на одном перпендикуляре к данной плоскости.

Положим, что плоскость чертежа (рис. 5) представляет ту плоскость, в которой перемещается данная неизменяемая система точек. Возьмем две точки A и B системы, лежащие в плоскости чертежа и соединим их прямой AB. Если при перемещении системы эта прямая из первоначального положения AB переместилась в положение A_1B_1, то требуется доказать, что линия AB может быть совмещена с линией A_1B_1 путем простого вращения около некоторой оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Соединив прямыми точки A и A_1, а также B и B_1 и разделив пополам линии AA_1 и BB_1 восставляем из полученных точек M и N перпендикуляры к линиям AA_1 и BB_1. Точка O пересечения этих перпендикуляров будет в то же время точкой пересечения оси вращения, перпендикулярной к плоскости чертежа.


Рис. 5.

В самом деле, соединив точки A, A_1, B, B_1 с точкой O, получаем треугольники AOB и A_1OB_1 равные друг другу, так как линии $AO = A_1O$ и $BO = B_1O$, как гипотенузы прямоугольных треугольников AMO, A_1MO, BNO и B_1NO, причем треугольники AMO и A_1MO имеют один катет общий, а два других — равные по построению. Точно такое же соотношение мы имеем и в прямоугольных треугольниках BNO и B_1NO. Кроме того $AB = A_1B_1$, как расстояние между одними и теми же точками неизменяемой системы. Если повернуть треугольник AOB вокруг оси O на угол $\varphi = BOB_1$, то, вследствие доказанного нами равенства треугольников AOB и A_1OB_1, треугольник AOB вполне совместится с треугольником A_1OB_1. Из этого мы непосредственно заключаем, что и вся система переместится из положения, определяемого линией AB, в положение, определяемое прямой A_1B_1, при помощи вращения на угол φ вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Если неизменяемая система, перемещаясь параллельно данной плоскости, все

время остается параллельной самой себе, то мы получим тот частный случай, когда ось вращения системы находится в бесконечности. В самом деле, пусть прямая AB (рис. 6) определяет первоначальное положение такой системы, а $A_1B_1 \parallel AB$ ее положение после перемещения. Соединив прямыми A и A_1, а также B и B_1, разделив эти прямые пополам и восставив к ними ерпендикуляры в точках деления M и N, мы увидим, что $Mm \parallel Nn$. Таким образом, ось вращения в этом случае будет находиться в бесконечности и система будет вращаться по кругу бесконечно большого радиуса.

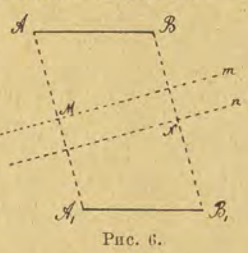


Рис. 6.

Положение 2. Если неизменяемая система имеет одну неподвижную точку, то всякое перемещение такой системы, приводящее ее в новое положение, может быть произведено при помощи одного только поворота на определенный угол около некоторой оси, проходящей через неподвижную точку системы (теорема Д'Аламбера).

Положение неизменяемой системы, имеющей одну неподвижную точку, может быть вполне определено положением двух точек этой системы, не лежащих на одной прямой, проходящей через неподвижную точку. Пусть O (рис. 7) представляет неподвижную точку данной системы, а точки A и B две какие-нибудь точки той же системы, не лежащие обе на одной прямой, проходящей через точку O. Так как выбор точек A и B произволен, то мы можем всегда взять такие две точки системы, которые находились бы на поверхности сферы, имеющей своим центром точку O. Положим, что точки A и B удовлетворяют этому условию. Проведем через A и B дугу большого круга $\smile AB$. Ясно, что эта дуга при всяких перемещениях системы останется дугой большого круга и будет перемещаться по поверхности шара O. Положим, что после

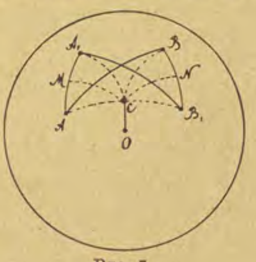


Рис. 7.

перемещения системы дуга AB примет положение, изображенное на фигуре дугой большого круга A_1B_1. Проведем дуги больших кругов через точки A и A_1, а также через точки B и B_1. Разделим дуги AA_1 и BB_1 пополам и через полученные таким образом точки M и N проведем дуги больших кругов, перпендикулярные к построенным ранее дугам AA_1 и BB_1. Положим, что эти дуги MC и NC пересекутся в точке C. Соединив точку C дугами больших кругов с точками A, A_1, B, B_1, мы можем доказать, что сферические треугольники ABC и A_1B_1C равны друг другу. В самом деле, $\smile AB = \smile A_1B_1$, как расстояние между одними и теми же точками неизменяемой системы. $\smile AM = \smile A_1M$ и $\smile BN = \smile B_1N$ по построению, а кроме того сферические треугольники AMC, A_1MC, BNC и B_1NC прямоугольны. На основании этого мы можем к этим треугольникам применить соответствующие формулы сферической тригонометрии. Составив эти формулы для треугольников AMC и A_1MC, получаем:

1) $\cos CA = \cos \overset{\smile}{AM} \cdot \cos \overset{\smile}{CM}$

2) $\cos CA_1 = \cos \overset{\smile}{A_1M} \cdot \cos \overset{\smile}{CM}$

Разделив первую формулу на вторую и приняв во внимание, что $\smile AM = \smile A_1M$, находим: $\smile CA = \smile CA_1$. Совершенно аналогично мы можем получить: $\smile CB = \smile CB_1$.

Из этого рассуждения мы заключаем о равенстве двух сферических треугольников ABC и A_1B_1C, так как каждая сторона одного треугольника имеет себе соответственную равную сторону в другом треугольнике. Соединив точки C и O прямой CO и приняв эту прямую за ось вращения, мы можем совместить треугольник ABC с треугольниками A_1B_1C, повернув первый треугольник вокруг оси OC на угол $\varphi = \angle BCB_1$.

Применяя вышеуказанный способ построения, мы можем при любом перемещении неизменяемой системы, имеющей неподвижную точку, отыскать такую ось, при повороте вокруг которой на определенный угол будет осуществлено требуемое перемещение системы.

В том случае, когда перемещающаяся система не имеет неподвижной точки, такая система носит вообще название

свободной системы. Перейдем теперь к рассмотрению случаев перемещения такой свободной системы.

Положение 3. Всякое перемещение свободной неизменяемой системы может быть произведено при помощи двух движений, одного поступательного и одного вращательного.

Заметим, прежде всего, что положение всякой свободной системы вполне определяется положением трех точек этой системы, не лежащих на одной прямой.

Пусть (рис. 8) A, B и C — три точки, определяющие положение данной свободной системы, причем эта система после перемещения оказывается в положении $A_1 B_1 C_1$. Соединив прямой точки A и A_1, придадим поступательное движение системе ABC по направлению AA_1. При таком перемещении система ABC займет положение $A_1 B_{11} C_{11}$, причем $AA_1 = BB_{11} = CC_{11}$. Так как при поступательном движении расстояние между точками A, B и C не изменилось, то стороны треугольника $A_1 B_{11} C_{11}$ будут равны и параллельны сторонам треугольника ABC. Для совмещения треугольника $A_1 B_{11} C_{11}$ с треугольником $A_1 B_1 C_1$ достаточно (на основании теоремы Д'Аламбера) произвести вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку A_1, которую мы можем рассматривать как неподвижную точку системы. Что касается порядка перемещений системы, то этот порядок совершенно безразличен; мы можем или сначала произвести вращательное движение, а затем поступательное, или наоборот. В результате получится то же самое. На основании только что доказанного положения 3 мы видим, что всякое перемещение свободной системы может быть произведено путем двух движений: вращательного и поступательного. Пока мы ничего не говорим о взаимном отношении между положением оси вращения и направлением поступательного движения. Из рис. 8 мы видим, что эти два направления, а именно направление поступательного движения AA_1 и направление оси ZZ_1 не параллельны друг другу.

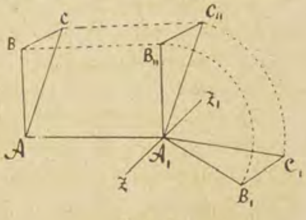


Рис. 8.

Докажем теперь самую общую теорему о перемещении свободной неизменяемой системы, которая называется по имени ее автора теоремой Шаля.

Теорема Шаля. Всякое перемещение свободной системы из одного положения в другое может быть произведено путем вращения вокруг определенной оси и поступательного движения по направлению, параллельному той же оси. Такое движение носит название винтового. Положим (рис. 9), на основании положения 3 мы нашли, что данное перемещение некоторой свободной системы может быть произведено путем вращения вокруг оси ZZ и поступательного

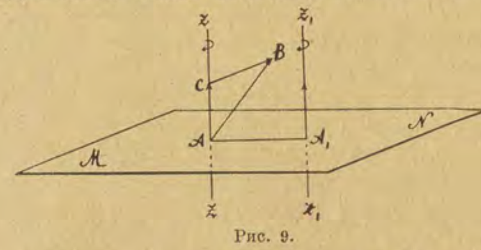


Рис. 9.

движения по направлению AB. Разложим найденное поступательное движение, выражающееся вектором AB, на две слагаемые: 1) поступательное движение по направлению оси ZZ, выражающееся вектором AC и 2) поступательное движение, перпендикулярное ZZ, обозначенное на рис. 9 вектором CB. Сделав это, мы получим три движения:

1) Вращательное вокруг оси ZZ.

2) Поступательное CB, перпендикулярное оси вращения ZZ.

3) Поступательное AC, параллельное оси ZZ.

В виду того, что движение CB перпендикулярно оси вращения, первое и второе движения дадут перемещение системы параллельно плоскости MN, перпендикулярной к ZZ. Между тем, на основании положения 1 мы знаем, что такое перемещение может быть осуществлено путем одного вращения вокруг определенной оси, которую мы можем найти при помощи построения, указанного при доказательстве положения 1. Пусть эта ось будет изображаться линией Z_1Z_1. По самому способу построения мы знаем, что $ZZ \parallel Z_1Z_1$. В результате мы получаем два движения: 1) вращательное вокруг оси Z_1Z_1

и 2) поступательное AC, параллельное той же оси $Z_1 Z_1$. Таким образом теорема Шаля доказана.

Если в пространстве нам даны две тождественные системы точек, то для указания пути совмещения их друг с другом необходимо только найти соответсвующую ось вращения и определить величину и направление перемещения вдоль найденной оси. Таким образом, мы всегда можем, и притом вполне однозначно, определить положение в пространстве той оси, при посредстве которой возможно произвести совмещение двух тождественных систем точек.

Две тождественные системы точек мы будем называть совместно-симметричными на том основании, что в этом случае имеется возможность получить совмещение обоих систем. Ту ось, вдоль которой необходимо передвинуть и вокруг которой надо повернуть данную систему для ее совмещения с симметричной ей системой, мы будем называть осью совмещения.

3. СОВМЕЩЕНИЕ ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ.

В случае возможности совмещения данной системы точек с зеркальным изображением другой системы мы будем называть такие две системы зеркально-симметричными. Если даны в пространстве две зеркально-симметричные системы точек, то мы всегда можем совместить первую систему с зеркальным изображением второй и наоборот. Для такого совмещения необходимо только получить зеркальное изображение первой системы, построив зеркальную плоскость произвольного положения, и затем найти ось совмещения первой системы с зеркальным изображением второй. При таком построении мы не будем иметь никакой связи между положением оси совмещения с одной стороны и плоскости отражения с другой. Благодаря этому, вопрос допускает бесконечное число решений в зависимости от того, какую мы построим зеркальную плоскость или какую выберем ось совмещения. Однако, построив определенную плоскость отражения, мы получаем вполне однозначное решение для определения положения оси совмещения. В числе возможных комбинаций будет и такая

при которой ось совмещения будет осью вращения, т. е. осью совмещения с передвижением, параллельным оси и равным нулю. В самом деле, располагая плоскость отражения между двумя симметричными системами, мы можем достигнуть того, что соответственные точки двух симметричных систем будут находиться на одинаковом расстоянии от плоскости отражения, причем в этом случае для совмещения изображения первой системы со второй системой нам уже не нужно будет производить особого передвижения полученного изображения относительно построенной зеркальной плоскости, так как такое передвижение произойдет при вращении вокруг определенной оси.

Таким образом, при построении плоскости отражения мы можем ввести первое ограничительное условие, заключающееся в том, что мы поставим себе задачей отыскание такой зеркальной плоскости, которая давала бы возможность получить совмещение полученного изображения с тождественной ему системой, путем простого вращения около некоторой оси определенного положения. При таком ограничении задача еще не будет иметь однозначного решения. Для того, чтобы решение было однозначным, необходимо ввести еще одно ограничение, приняв которое, мы получим общую теорему, дающую наиболее простой способ совмещения двух зеркально-симметричных систем какого угодно положения в пространстве. Эта теорема совершенно аналогична теореме Шаля для двух тождественных систем.

Положение 5. Если даны две зеркально-симметричные системы, то мы всегда можем совместить одну из данных систем с зеркальным изображением другой системы при помощи отражения в одной зеркальной плоскости определенного положения и последовательного вращения на определенный угол полученного отражения параллельно построенной зеркальной плоскости.

Как уже было упомянуто выше, положение всякой свободной неизменяемой системы может быть определено положением трех ее точек, не лежащих на одной прямой. В виду этого, мы (рис. 10) можем определить положение каждой из двух зеркально-симметричных систем, взяв три точки A, B и C одной системы и три соответствующие им точки A_1, B_1, C_1 другой. Соединим прямыми AA_1, BB_1 и CC_1

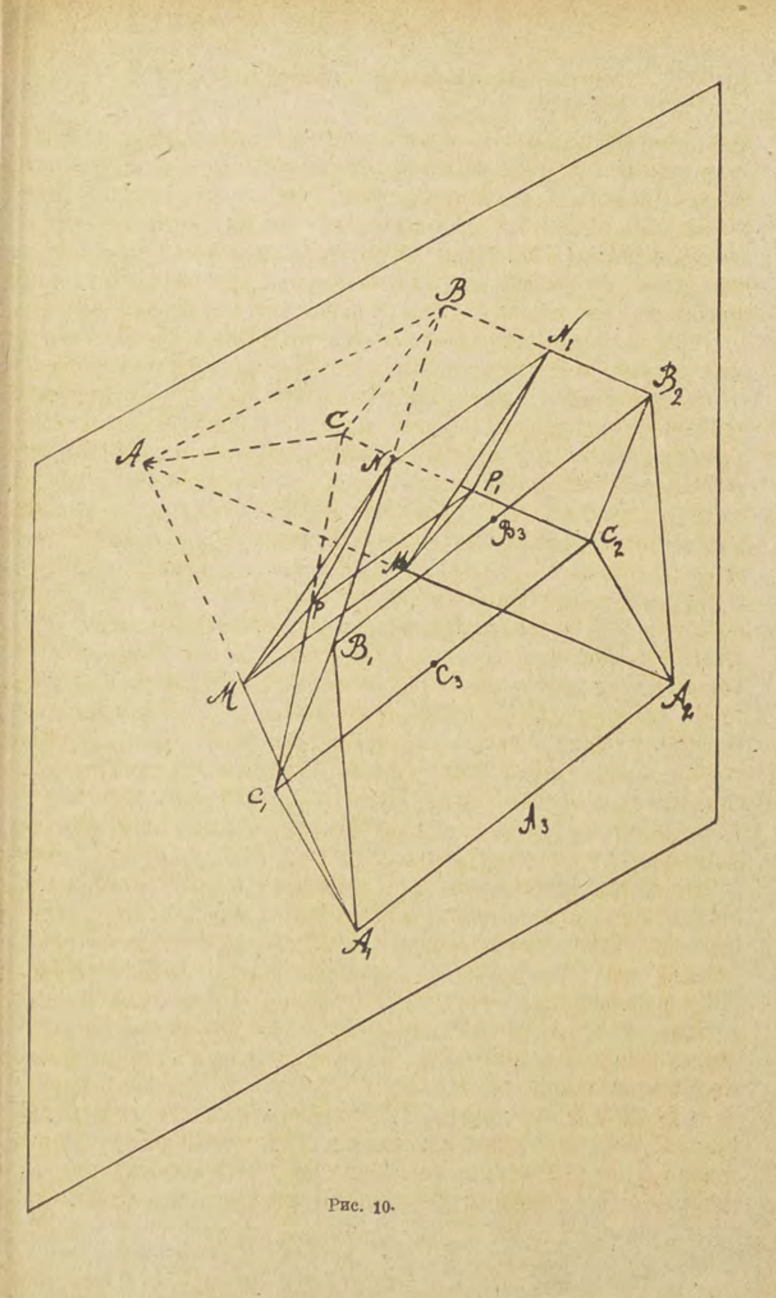


Рис. 10.

соответственные точки обоих систем. Каждую из этих линий разделим пополам и через полученные таким образом три точки M, N и P проведем плоскость, которую и примем за плоскость отражения. Опустив перпендикуляры AM_1, BN_1 и CP_1 из точек A, B и C на построенную нами плоскость отражения и продолжив эти перпендикуляры по другую сторону построенной плоскости, отложим на этих продолжениях отрезки: $A_2M_1 = AM_1$, $B_2N_1 = BN_1$ и $C_2P_1 = CP_1$. При таком построении треугольник $A_2B_2C_2$ будет зеркальным изображением треугольника ABC. Проведем прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и докажем, что эти линии параллельны плоскости MNP. Для этого проведем три плоскости, определяемые каждая тремя точками AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2. Эти плоскости пересекутся с построенной нами зеркальной плоскостью по линиям MM_1, NN_1 и PP_1.

Рассмотрим теперь взаимоотношения, существующие в треугольниках AMM_1, и AA_1A_2, имеющих общий угол при точке A. По построению мы имеем: $AM = A_1M$ и $AM_1 = A_2M$. В виду этого мы заключаем, что треугольники AMM_1 и AA_1A_2 подобны, а стороны MM_1 и AA_2 параллельны. Путем аналогичных рассуждений находим: $NN_1 \parallel B_1B_2$ и $PP_1 \parallel C_1C_2$. Так как линии MM_1, NN_1 и PP_1 находятся в построенной нами плоскости, то параллельные им линии A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, соединяющие соответственные точки двух тождественных систем $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, будут параллельны той же зеркальной плоскости. Из этого мы заключаем, что совмещение двух тождественных систем $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ может быть произведено путем определенного перемещения одной из систем параллельно построенной плоскости отражения. Однако, из положения 1 мы знаем, что такое перемещение можно заменить вращением вокруг оси, перпендикулярной к той плоскости, параллельно которой происходит перемещение, т. е., в нашем случае, мы можем всегда отыскать определенную ось вращения, перпендикулярную построенной нами зеркальной плоскости.

Только что приведенное доказательство положения 5 дает способ построения зеркальной плоскости. Что касается определения положения в пространстве оси вращения, перпендикулярной к этой плоскости, то заметим, что такой осью

будет линия пересечения плоскостей, перпендикулярных к линиям $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ и проходящих через середины A_3, B_3 и C_3 этих отрезков прямых. В общем случае такие плоскости пересекутся на конечном расстоянии и угол поворота вокруг оси будет определяться так же, как это было указано в положении 1. В случае параллельности таких плоскостей ось вращения будет находиться в бесконечности.

4. СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ.

До сих пор мы рассматривали те операции, при посредстве которых мы можем совместить друг с другом все точки данной системы с соответственными им точками симметричной системы. Такие операции называются вообще симметрическими преобразованиями. Если нам даны две системы, симметричные друг другу, то такие системы мы можем рассматривать или как совершенно независимые одну от другой, причем их относительное положение в пространстве может меняться, или мы можем принять их относительное расположение неизменным. Если относительное положение двух или нескольких симметричных систем вполне определенно и неизменно, то всю совокупность таких систем мы можем рассматривать как одну систему, обладающую внутренней симметрией. Такая система получает название самосимметричной или просто симметричной системы. Из этого определения как следствие вытекает следующее общее положение: всякая симметричная система может быть разделена на части или вполне тождественные друг другу или тождественные с зеркальным изображением одна другой. Если симметричную систему подвергнуть какому-нибудь симметрическому преобразованию, то такому преобразованию должна подвергнуться каждая часть системы и в то же время сама система не должна претерпеть никакого внутреннего изменения. Кроме того, после симметрического преобразования не произойдет никакого изменения и в положении системы в пространстве. В самом деле, подвергнув данную симметричную систему некоторому соответствующему ей симметрическому преобразованию, мы получим совмещение всех частей системы с со-

ответствующими им частями той же системы и, таким образом, каждая точка системы, имеющая определенное положение в пространстве, после симметрического преобразования будет заменена соответствующей ей точкой. Таким образом, положение системы в пространстве не изменится, так как некоторый участок пространства, занятый определенной частью системы, будет занят после преобразования совершенно тождественной ей частью той же системы.

Таким образом, симметричной системой мы будем называть такую систему, которая может быть подвергнута неограниченное число раз определенным симметрическим преобразованиям, не претерпевая никакого изменения в расположении совокупности соответственных точек в пространстве.

5. ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ.

Как мы уже могли заметить, при каждом симметрическом преобразовании мы можем представить себе некоторый геометрический образ, как например, зеркальную плоскость, ось вращения и т. д., присутствие которых обозначает возможность произвести то или иное симметрическое преобразование. Такие геометрические образы называются элементами симметрии. Мы можем различать следующие элементы симметрии:

1) Оси симметрии.

Если элементом симметрии является некоторая ось совмещения, вокруг которой необходимо повернуть систему на определенный угол и передвинуть на некоторое расстояние вдоль той же оси, чтобы совместить друг с другом симметричные части системы, то такая ось называется винтовой осью симметрии.

На рис. 11 изображена такая винтовая ось, параллельная плоскости чертежа, в виде прямой PQ. Черные кружки $a_1 \dots a_{14}$ вдоль оси представляют собою симметричные части системы, совмещающиеся последовательно друг с другом при симметрическом преобразовании, обуславливаемом данной винтовой осью.

Рис. 11.

Симметрическое преобразование, связанное с присутствием винтовой оси симметрии, заключает в себе некоторое поступательное движение вдоль этой оси. Так как при симметрическом преобразовании симметричная система не должна менять своего места в пространстве, то из этого непосредственно мы можем вывести заключения о невозможности винтовой оси как элемента симметрии в случае симметричной системы конечных размеров.

В то же время, присутствие одной или нескольких винтовых осей симметрии для симметричной системы, имеющей бесконечные размеры, вполне возможно. Если перемещение вдоль винтовой оси симметрии равно нулю, то винтовая ось превращается в ось вращения и, рассматриваемая как элемент симметрии, получает название оси симметрии. Осью симметрии могут обладать системы как конечных, так и бесконечных размеров. Каждая ось симметрии так же, как и винтовая ось симметрии, характеризуется определенным, присущим ей, углом поворота.

На рис. 12 изображена ось симметрии PQ, не параллельная плоскости чертежа. Черные кружки $a_1 \ldots a_{12}$ представляют собою симметричные части некоторой системы, совмещающиеся друг с другом всякий раз при повороте вокруг оси PQ на угол $a_1 o a_2$. Так как кружков a всего 12, то совмещение симметричных частей системы произойдет 12 раз при вращении вокруг PQ на угол 360^0. Центры всех симметричных частей $a_1 \ldots a_{12}$ лежат в плоскости, перпендикулярной к PQ.



Рис. 12.

2) Элементы сложной симметрии.

Элементом сложной симметрии первого рода являются два геометрических образа, неразрывно связанные друг с другом и взаимно перпендикулярные: a) ось вращения и b) плоскость отражения. В случае сложной симметрии первого рода совмещение симметричных частей системы получается после вращения вокруг оси и последующего отражения в перпендикулярной плоскости, или наоборот. В виду

этого, мы различаем в элементе сложной симметрии первого рода: a) ось сложной симметрии и b) плоскость сложной симметрии.

На рис. 13 изображен элемент сложной симметрии первого рода, состоящий из оси сложной симметрии PQ и плоскости сложной симметрии MN. Кружками $a_1 \ldots a_6$ представлены

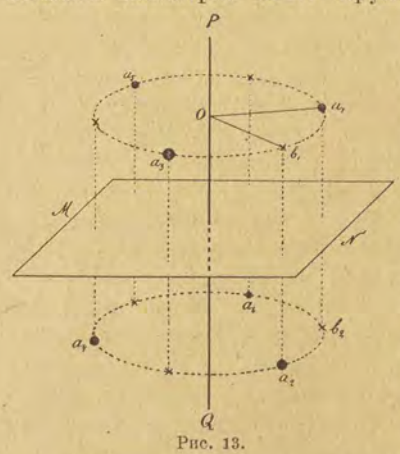


Рис. 13.

симметричные части системы, причем часть a при повороте на угол $a_1 o b_1$ принимает положение b_1, отмеченное крестиком. Так как в точке b_1 не имеется части системы, симметричной по отношению a_1, то после поворота на угол $a_1 o b_1$ совмещения симметричных частей не произойдет. Точно так же не произойдет совмещения симметричных частей при отражении в плоскости MN, так как часть a_1 совпадет после такого отражения с частью b_2 не симметричной по отношению к a_1. Совмещение всех симметричных частей произойдет после поворота вокруг PQ на угол $a_1 o b_1$ и последующего отражения в плоскости MN, причем a_1 совместится с a_2; a_2 с a_3; и т. д.

Если ось сложной симметрии первого рода находится в бесконечности, то мы будем иметь в качестве симметрических преобразований: a) отражение в некоторой плоскости и b) перемещение по определенному направлению, параллельному этой плоскости. В этом случае мы получаем такой элемент симметрии, которой возможен только для симметричных систем бесконечных размеров. Этот элемент симметрии носит название плоскости симметричного скольжения или просто плоскости скольжения. Во всех других случаях ось сложной симметрии первого рода будет занимать определенное положение и мы будем иметь вообще элемент сложной симметрии первого рода, одинаково возможный как для симметричных систем конечных, так и бесконечных размеров.

Присутствие плоскости скольжения обуславливает возможность совмещения симметричных частей системы путем отражения и параллельного передвижения по определенному направлению.

На рис. 14 представлена плоскость симметричного скольжения MN. Совмещение симметричных частей $a_1 \ldots a_8$ некоторой системы происходит следующим образом. Передвигаем все симметричные части на расстояние $a_1 b_1$ параллельно плоскости скольжения. Получаем перемещение всех частей $a_1 \ldots a_8$ в положение частей $b_1 \ldots b_8$. Сделав отражение в плоскости MN такой перемещенной системы, получаем совмещение всех симметричных частей $a_1 \ldots a_8$ с зеркальными изображениями тех же частей. Если расстояние, на которое нужно передвинуть систему для совмещения полученных отражений с соответственными им частями системы, равно нулю, то вместо элемента сложной симметрии мы будем иметь элемент простой симметрии. Этот элемент симметрии носит название плоскости симметрии. В виду того, что присутствие плоскости симметрии не обуславливает никакого передвижения, параллельно определенному направлению, этот элемент симметрии может существовать в симметричных системах как конечных, так и бесконечных размеров.
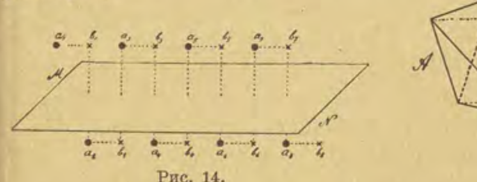


Рис. 14.

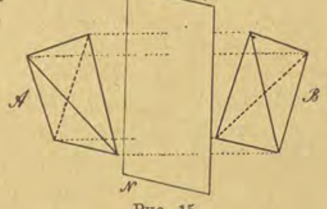


Рис. 15.

На рис. 15 изображена плоскость симметрии MN и две симметричные части A и B некоторой системы. Вершины этих частей, совмещающиеся друг с другом после отражения в зеркальной плоскости соединены пунктиром.

Кроме рассмотренных нами случаев совмещения частей фигуры при помощи элемента сложной симметрии первого рода, мы должны еще рассмотреть случаи присутствия элементов сложной симметрии второго рода. Такими элементами симме-

трии будут оси сложной симметрии второго рода. Ось сложной симметрии второго рода содержит в себе две симметрических операции: 1) операцию поворота вокруг оси и 2) операцию двойной оси сложной симметрии первого рода. Совмещение симметричных частей фигуры не происходит, если мы сделаем только одну из этих симметрических операций, но происходит всякий раз, когда произведены последовательно обе операции, причем порядок операций безразличен. Элементами сложной симметрии второго рода могут обладать симметричные системы как конечных, так и бесконечных размеров.

Таким образом, в симметричных системах конечных размеров могут существовать следующие элементы симметрии:

1) Оси симметрии.

2) Плоскости симметрии.

3) Элементы сложной симметрии (кроме плоскостей скольжения).

6. СИММЕТРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР.

Каждую геометрическую фигуру, линейную, плоскостную или пространственную, мы можем рассматривать с точки зрения ее симметричности, т. е., имея определенную геометрическую фигуру, мы можем поставить себе вопрос, насколько к имеющейся в нашем распоряжении фигуре приложимо определение, данное выше для симметричной системы. Если такое определение приложимо, то данная фигура будет представлять собою некоторую симметричную систему или, другими словами, будет обладать определенной симметрией, причем симметрия будет в свою очередь ближайшим образом определяться теми элементами симметрии, которые имеются у данной фигуры. Так как кристаллические индивидуумы — кристаллы, представляют собою выпуклые многогранники, то мы и обратимся к рассмотрению симметрических свойств таких многогранников.

Заметим, что для нахождения симметрических соотношений в выпуклых многогранниках мы можем идти двумя путями: 1) путем определения элементов симметрии всевозможных выпуклых многогранников и 2) путем вывода комбинаций

элементов симметрии, причем все такие комбинации должны быть возможными для выпуклых многогранников. Так как количество выпуклых многогранников различных видов и форм, вообще говоря, бесконечно велико, то, ясно, что, идя по пути пересмотра всех выпуклых многогранников, мы никогда не достигнем цели, и возможность пропустить по крайней мере некоторые случаи симметрии неизбежна. Второй путь, напротив, дает совершенно определенный, исчерпывающий результат. Однако, прежде чем пойти по этому единственно правильному пути, необходимо выяснить зависимость между несколькими элементами симметрии, в случае их совместного присутствия в одной и той же симметричной системе. Предварительно нам еще необходимо более подробно ознакомиться с основными свойствами каждого элемента симметрии, возможного для геометрической фигуры конечных размеров.

7. ОСИ СИММЕТРИИ.

Ось симметрии представляет собою линию, при повороте вокруг которой на некоторый угол все тождественные части данной симметричной фигуры совмещаются друг с другом.

Тот наименьший угол, на который необходимо повернуть вокруг оси симметрии фигуру, чтобы совместить друг с другом ее тождественные части, называется элементарным углом поворота для данной оси симметрии. Элементарный угол поворота определяет наименование оси симметрии, которое получается путем деления полного оборота 2π вокруг оси симметрии на элементарный угол поворота. Таким образом, если элементарный угол поворота равен α, то наименование оси симметрии $n = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{360^0}{\alpha^0}$. Например, если элементарный угол поворота равен 180^0, то $n = \frac{360}{180} = 2$, и ось симметрии носит название двойной; если $n = 3$, то ось симметрии получает название тройной и т. д. Для обозначения оси симметрии мы будем употреблять букву L, причем наименование оси будем ставить в виде показателя степени при этой букве. Таким образом, L^n будет обозначать ось симметрии наименования n. Легко доказать, что совмещение

симметричных частей фигуры должно происходить некоторое целое число раз при полном обороте вокруг оси симметрии на угол $360^0 = 2\pi$, т. е. ось симметрии будет всегда иметь целое наименование. Положим, что у нас имеется некоторая фигура, обладающая осью симметрии L^n наименования n, причем элементарный угол поворота для этой оси будет α. Пусть ось симметрии будет перпендикулярна к плоскости чертежа рис. 16 и пересекает эту плоскость в точке L^n. Проведем через ось L^n две плоскости, образующие между собой угол α и пересекающие плоскость чертежа по линиям $L^n A$ и $L^n A_1$. Повернем фигуру на угол α вокруг L^n по направлению указанному стрелкой. После такого поворота линия $L^n A$ примет положение линии $L^n A_1$, а эта последняя линия примет положение $L^n A_2$. Таким образом, часть фигуры, заключенная между плоскостями $L^n A$ и $L^n A_1$ после поворота примет положение, которое раньше занимала часть фигуры ограниченная плоскостями $L^n A_1$ и $L^n A_2$. Так как, по условию, при повороте на элементарный угол вокруг оси симметрии, совмещаются все тождественные части фигуры, то часть фигуры, заключенная между плоскостями $L^n A$ и $L^n A_1$, будет тождественна части, заключенной между плоскостями $L^n A_1$ и $L^n A_2$. Сделав еще раз поворот в ту же сторону на угол α, мы найдем еще одну симметричную часть фигуры, заключающуюся между плоскостями $L^n A_2$ и $L^n A_3$. Производя последовательно такие повороты на угол α вокруг оси L^n по одному и тому же направлению, мы должны притти к первоначальному положению фигуры, причем часть фигуры, заключенная между плоскостями $L^n A$ и $L^n A_1$ должна занять то положение, какое она имела до первого элементарного поворота вокруг оси L^n. При дальнейшем вращении мы будем иметь уже полное повторение тех совмещений, которые мы имели во время первого вращения. Докажем теперь, что $\angle \alpha$ должен быть целой частью 360^0. Для доказательства этого положения допустим, что $\angle \alpha$ не является целой частью 360^0. При таком допущении мы будем иметь следующее равенство: $\frac{360^0}{\alpha} = n - k$, где n — некоторое целое число, а k — правильная дробь.

Рис. 16.

Из этого равенства мы непосредственно получаем два неравенства: $\frac{360^0}{\alpha} < n$ и $\frac{360^0}{\alpha} > n - 1$ или $n\alpha > 360^0$ и $(n-1)\,\alpha < 360^0$. В случае, если такие неравенства действительно имеют место, мы получаем следующие положения совмещения: 1) первоначальное, 2) соответствующее углу поворота $(n-1)\,\alpha$ и 3) соответствующее углу поворота $n\alpha$. 1) и 2) положения совмещения находятся друг от друга на угловом расстоянии $360^0 - (n-1)\,\alpha$. 1) и 3) положения совмещения образуют между собой угол равный $n\alpha - 360^0$. Угловые расстояния между тремя положениями совмещения, соответствующими рассматриваемому случаю, изображены на рис. 17, где L^nA — первоначальное положение некоторого направления, перпендикулярного оси L^n; L^nr — положение совмещения, соответствующее углу поворота $(n-1)\alpha$ и L^nq — положение совмещения, соответствующее углу $n\alpha$.

Рис. 17.

Таким образом, мы имеем три угла: $\angle rL^nA = 360^0 - (n-1)\alpha$; $\angle qL^nA = n\alpha - 360^0$ и $\angle rL^nq$. Так как L^nA, L^nr и L^nq три положения совмещения одного и того же направления, выражающегося линией L^nA, то элементарным углом поворота будет теперь уже не угол α, а угол rL^nA или угол qL^nA, причем и тот и другой угол меньше α. Но угол α, как элементарный угол поворота для оси L^n, должен быть наименьшим, при котором получается совпадение симметричных частей фигуры. Таким образом, сделав предположение, что $\frac{360^0}{\alpha}$ — не целое число, мы пришли к выводу, противоречащему условию элементарности угла α для оси L^n. Из этого мы заключаем, что $\frac{360^0}{\alpha} = n$, где n — целое число.

Если у нас имеется в фигуре конечных размеров ось симметрии L^n наименования n с соответственным элементарным углом поворота α, то при повороте вокруг этой оси на угол 2α, 3α и т. д. мы должны каждый раз получать совпадение тождественных частей фигуры друг с другом. Благодаря этому, ось симметрии наименования n может рассматриваться, как ось симметрии наименования $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ и т. д. если только $\frac{n}{2}$,

3*

$\frac{n}{3} \cdots$ — целые числа. Таким образом, например, шестерная ось симметрии будет в то же время двойной и тройной осью симметрии; восьмерная ось симметрии будет также двойной и четверной осью симметрии и т. д.

8. ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ.

Плоскостью симметрии называется зеркальная плоскость, делящая симметричную фигуру на две равные по объему части, причем каждой точке одной части соответствует одна точка другой части.

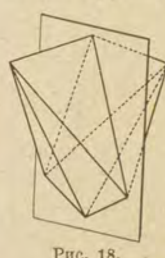


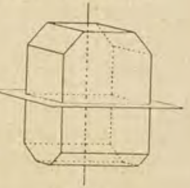
Рис. 18.

Каждые две соответственные точки расположены на одном перпендикуляре к плоскости симметрии и на одинаковом расстоянии по разные стороны от этой плоскости. Каждые две соответственные части фигуры, разделенные одна от другой плоскостью симметрии, совмещаются с зеркальным изображением одна другой, причем плоским зеркалом для получения изображения служит плоскость симметрии. Для обозначения плоскости симметрии мы будем употреблять букву P (рис. 18).

9. ЭЛЕМЕНТЫ СЛОЖНОЙ СИММЕТРИИ ПЕРВОГО РОДА.

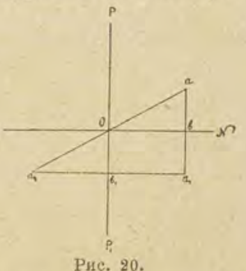
Элементом сложной симметрии первого рода, как мы уже упоминали, является ось и перпендикулярная к ней плоскость сложной симметрии. Совмещение симметричных частей не происходит после поворота вокруг оси сложной симметрии на ее элементарный угол поворота. Точно также совмещение симметричных частей не происходит после отражения в плоскости сложной симметрии. Такое совмещение происходит только после того, как сделаны последовательно обе операции симметрического преобразования, связанные как с осью, так и с плоскостью сложной симметрии, т. е. совмещение симметричных частей произойдет после поворота фигуры на элементарный угол вокруг оси сложной симметрии и последующего затем отражения в плоскости сложной симметрии.

Порядок, в котором произведены симметрические преобразования, соответствующие элементу сложной симметрии, не имеет никакого значения. Так как мы можем иметь в различных элементах сложной симметрии (рис. 19) оси сложной симметрии различных наименований, то мы условимся называть самый элемент сложной симметрии первого рода — осью сложной симметрии, причем мы будем всегда подразумевать необходимым также и присутствие перпендикулярной к этой оси плоскости сложной симметрии. Для обозначения оси сложной симметрии мы будем употреблять, как и для обозначения оси симметрии, букву L с значком n внизу и справа, причем n — соответствует наименованию оси сложной симметрии. Таким образом L_n будет обозначать ось сложной симметрии наименования n. Рассмотрим теперь свойства осей сложной симметрии различных наименований, начиная с двойной оси сложной симметрии.


Рис. 19.

10. ОСИ СЛОЖНОЙ СИММЕТРИИ.

Если в фигуре конечных размеров имеется двойная ось сложной симметрии, то совмещение симметричных частей фигуры друг с другом произойдет после поворота вокруг этой оси на угол в 180^0 и отражения в плоскости сложной симметрии, перпендикулярной к этой оси. Пусть двойная ось сложной симметрии находится в плоскости чертежа рис. 20 и по своему положению совпадает с линией PP_1. Плоскость сложной симметрии, перпендикулярная к плоскости чертежа, пересекается с этой последней по линии MN, причем точка O является точкой пересечения PP_1 и MN.


Рис. 20.

Возьмем какую нибудь точку a, находящуюся в плоскости рис. 20, но не лежащую ни на оси PP_1 ни на линии MN и подвергнем взятую нами точку a симметрическому преобразованию, соответствующему двойной оси сложной симме-

трии. Для этого нам необходимо произвести следующие операции: 1) получить зеркальное изображение точки a в плоскости MN и 2) повернуть это изображение на угол в 180^0 вокруг оси PP_1. Для получения зеркального изображения точки a в плоскости MN, опускаем из точки a перпендикуляр ab на линию MN и продолжаем этот перпендикуляр вниз, так как изображение a_1 точки a будет находиться на расстоянии $ba_1 = ab$ по другую сторону линии MN.

Таким образом, мы получаем точку a_1, причем эта точка должна быть повернута на угол 180^0 вокруг оси PP_1. При таком повороте точка a_1 будет двигаться по кругу, находящемуся в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа и пересекающейся с этой последней по линии $a_1b_1a_2$, причем в случае равенства $a_1b_1 = b_1a_2$ точка a_1 после поворота вокруг оси PP_1 на угол 180^0 совпадет с точкой a_2. Таким образом, проделав обе операции, связанные с присутствием двойной оси сложной симметрии PP_1, мы из точки a выведем точку a_2, причем обе эти точки будут лежать в плоскости чертежа рис. 20. Соединив прямыми точки a и a_2 с точкой O, получим два прямоугольных треугольника abO и Ob_1a_2. По построению мы имеем:

$$Ob \perp PP_1, \quad a_2b_1 \perp PP_1, \quad Ob_1 \perp Ob \quad \text{и} \quad ab \perp Ob.$$

Из этих соотношений мы выводим: $ab \parallel Ob_1$ и $Ob \parallel a_2b_1$. В виду параллельности двух сторон прямоугольных треугольников мы заключаем о параллельности и их остальных сторон, т. е. $Oa \parallel Oa_2$. Но так как линии Oa_2 и Oa имеют общую точку O, то для их параллельности необходимо, чтобы они совпадали всеми точками. Другими словами, линия aa_2 — прямая. Таким образом, две симметричные точки фигуры, выводящиеся друг из друга при посредстве двойной оси сложной симметрии, находятся на прямой, проходящей через точку пересечения оси и плоскости сложной симметрии.

Из построений рис. 20 мы имеем: $Ob = b_1a_1 = b_1a_2$ и $ab = ba_1 = Ob_1$. Из этих равенств мы заключаем о равенстве прямоугольных треугольников abO и Ob_1a_2 и следовательно $Oa = Oa_2$. Таким образом, в случае двойной оси сложной симметрии обе симметричные точки a и a_2 фигуры находятся

на равных расстояниях от точки O — пересечения оси и плоскости сложной симметрии.

На основании этих соображений, в случае двойной оси сложной симметрии, мы можем применить следующий способ нахождения точки a_2, симметричной данной точке a. Соединяем прямой aO точку a с точкой O — пересечения оси и плоскости сложной симметрии; продолжаем эту прямую за точку O и на этом продолжении откладываем отрезок $Oa_2 = Oa$. Точка a_2 будет искомой точкой, симметричной a. Из этого мы можем сделать тот вывод, что для нахождения точки a_2, симметричной данной точке a, нам достаточно знать положение точки O пересечения двойной оси сложной симметрии с плоскостью сложной симметрии, причем положение оси и плоскости сложной симметрии в пространстве совершенно безразлично, если только ось и плоскость пересекаются в точке O. Таким образом, каждое направление, проходящее через точку O, может быть принято за двойную ось сложной симметрии, причем плоскостью сложной симметрии будет служить плоскость, перпендикулярная к выбранному нами направлению и проходящая через ту же точку O. Из этого мы заключаем, что в случае присутствия одной двойной оси сложной симметрии таких осей будет бесконечное множество, причем все они пересекутся в одной точке.

Представим себе теперь (рис. 21) в пространстве какую-нибудь плоскостную фигуру, напр. косоугольный треугольник ABC и точку O, в которой пересекаются двойные оси сложной симметрии. Соединив точку O с вершинами косоугольного треугольника ABC прямыми OA, OB, OC и взяв на продолжениях этих прямых отрезки

Рис. 21.

$$OA_1 = OA, \quad OB_1 = OB$$

и $OC_1 = OC$ получим точки A_1, B_1, C_1, представляющие собою вершины треугольника $A_1B_1C_1$, симметричного данному треугольнику ABC. Из построения очевидно, что треугольник $A_1B_1C_1$ будет находиться в плоскости, параллельной плоскости треугольника ABC. Кроме того, треугольник

$A_1 B_1 C_1$ будет равен треугольнику ABC и расположен обратно. Таким образом, присутствие двойной оси сложной симметрии обуславливает специальное взаимоотношение симметричных частей фигуры, выражающееся в том, что каждая часть фигуры будет иметь себе равную, параллельную и обратно расположенную часть. В виду этого, точка O пересечения двойных осей сложной симметрии называется центром обратного равенства.

Всякая ось сложной симметрии будет в то же время осью симметрии вдвое меньшего наименования.

Положим, у нас имеется ось сложной симметрии наименования $2n$; требуется доказать, что эта ось сложной симметрии будет также осью симметрии наименования $\frac{2n}{2} = n$. Пусть PP' (рис. 22) будет данной осью сложной симметрии L_{2n} наименования $2n$ и MN — плоскость сложной симметрии. Если у нас имеется в пространстве некоторая точка a_1, не лежащая на линии PP_1, то, благодаря присутствию оси сложной симметрии, мы можем путем вращения вокруг оси L_{2n} и отражения в плоскости MN получить точки, симметричные точке a_1. Для получения одной из таких точек мы должны произвести поворот точки a_1 вокруг оси L_{2n} на элементарный угол поворота $\alpha = \frac{2\pi}{2n}$, соответствующий этой оси, а затем отразить полученную таким образом точку a_1' в плоскости MN. После этого мы получим точку a_2, симметричную данной точке a_1. Повторив такую операцию еще один раз, мы получим точку a_3 и т. д. После поворота вокруг оси L_{2n} на 360^0 и соответственного количества отражений в плоскости MN, мы должны снова придти к исходной точке a_1.

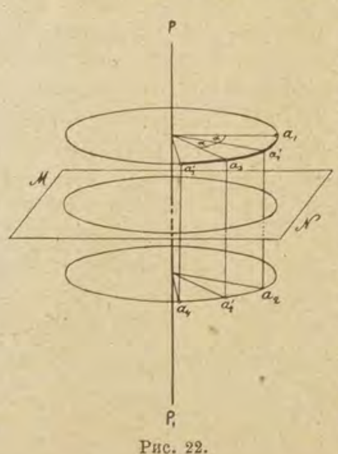


Рис. 22.

При вращении точки a_1 вокруг оси L_{2n} эта точка будет двигаться по окружности круга, плоскость которого перпендикулярна к линии PP_1. Если мы обратим внимание на расположение симметричных точек и их взаимоотношения, то увидим, что точка a_2 будет зеркальным изображением точки a_1, а точка a_3 будет представлять собою зеркальное изображение точки a_2, т. е. прямое повторение точки a_1. Так как точки a_1 и a_3 находятся на одной и той же окружности, перпендикулярно к которой расположена ось вращения, проходящая через центр этой окружности, то точку a_1 мы можем совместить с точкой a_3 путем поворота точки a_1 вокруг оси L_{2n} на угол $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Из этого мы заключаем, что ось сложной симметрии наименования $2n$ будет в то же время и осью простой симметрии наименования n. Таким образом, полное обозначение оси сложной симметрии будет L_{2n}^{n}. Так как по доказанному ранее положению наименование n оси симметрии может быть только целым числом, то наименование $2n$ оси сложной симметрии будет не только целым, но и всегда некоторым четным числом. Заметим еще, что точки a'_1, a'_2 и т. д. будут отсутствовать в системе симметричных элементов, выводящихся из присутствия оси сложной симметрии L_{2n}^{n} и являются только вспомогательными точками для построения действительно имеющихся в наличии точек a_1, a_2, a_3 и т. д.

При рассмотрении свойств осей симметрии мы пришли к заключению, что каждая ось симметрии наименования n будет в то же время и осью симметрии наименования $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ и т. д. если только $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ ...— целые числа. Что касается осей сложной симметрии, то и в этом случае мы также можем вывести определенное соотношение между осями сложной симметрии различных наименований.

Положим, что у нас имеются две оси сложной симметрии L_{2m}^{m} и L_{2n}^{n}, причем $n > m$. Пусть оси L_{2m}^{m} соответствует элементарный угол поворота α, а оси L_{2n}^{n} — угол α_1. В виду того, что по условию $n > m$, мы заключаем, что $\alpha_1 < \alpha$. Если α (рис. 22) есть элементарный

угол поворота для оси сложной симметрии L_{2m}^{m}, которая по своему положению совпадает с линией PP_1, то, сделав поворот точки a_1 вокруг этой оси на угол α, мы выведем вспомогательную точку a_1'. Сделав поворот вокруг оси L_{2m}^{m} на угол 2α, мы придем к реальной точке a_3; произведя поворот на угол 3α, найдем вспомогательную точку a_3' и т. д. Из этого мы заключаем, что каждый раз, когда мы производим поворот вокруг данной оси сложной симметрии на нечетное число элементарных углов, мы выводим всегда одну из вспомогательных точек. Если мы предположим, что линия PP_1 представляет собою не только ось сложной симметрии L_{2m}^{m}, но в то же время является и осью сложной симметрии L_{2n}^{n}, то при таком предположении необходимо должно быть соблюдено то условие, чтобы вращение вокруг оси L_{2n}^{n} на некоторое нечетное число элементарных углов поворота α_1, соответствующих этой оси, равнялось повороту на один элементарный угол α, соответствующий оси L_{2m}^{m}. Таким образом, если ось сложной симметрии L_{2n}^{n} является в то же время и осью сложной симметрии L_{2m}^{m}, то между элементарными углами поворотов, соответствующих этим осям, должно существовать соотношение $p\alpha_1 = \alpha$, или $p = \frac{\alpha}{\alpha_1}$, причем p должно быть не только целым, но и нечетным числом. Так как

$$2n = \frac{360^0}{\alpha_1} \text{ и } 2m = \frac{360^0}{\alpha}, \text{ то } \frac{n}{m} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = p.$$

Это последнее равенство выражает собою общее условие того, что ось сложной симметрии наименования $2n > 2m$ будет в то же время и осью сложной симметрии наименования $2m$. Представив выведенное соотношение в виде $2pm = 2n$ и переходя к частным случаям, мы можем вывести ряд соотношений между осями сложной симметрии различных наименований. Взяв, напр., $2m = 2$ и подставляя вместо p последовательно целые нечетные числа, начиная с 1, получаем ряд чисел:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54 (1)

При $2m = 4$, получаем ряд:

4, 12, 20, 28, 36, 44, 52 (2)

При $2m = 6$ имеем:

$$6, 18, 30, 42, 54. \qquad (3)$$

Каждый такой ряд будет представлять собою арифметическую прогрессию, причем каждая прогрессия будет характеризоваться особой разностью. Ряд (1) дает наименования осей сложной симметрии, представляющих собою в то же время и двойные оси сложной симметрии. Рассматривая более внимательно этот ряд, мы выводим следующее заключение: каждая ось сложной симметрии, являющаяся осью симметрии нечетного наименования, будет в то же время и двойной осью сложной симметрии. Таким образом, всякая фигура, имеющая ось сложной симметрии, которая будет осью симметрии нечетного наименования, обладает центром обратного равенства.

11. ЭЛЕМЕНТЫ СЛОЖНОЙ СИММЕТРИИ ВТОРОГО РОДА.

Для осей сложной симметрии второго рода мы можем доказать две теоремы, аналогичные доказанным для элементов сложной симметрии первого рода, а именно:

1. Оси сложной симметрии второго рода будут всегда четного наименования.

2. Ось сложной симметрии второго рода наименования $2n$ будет осью простой симметрии наименования n.

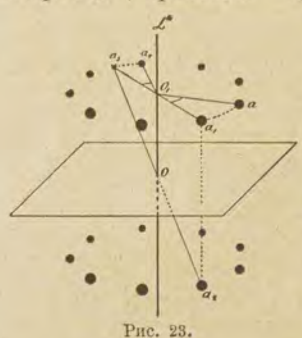
Оси сложной симметрии второго рода мы будем обозначать $L^{n}_{2n'}$. При рассмотрении специальных случаев осей сложной симметрии второго рода заметим, что двойная ось будет обладать особыми свойствами, выражающимися в следующем положении. Двойная ось сложной симметрии второго рода тождественна по связанному с ней симметрическому преобразованию с преобразованием, связанным с плоскостью симметрии, т. е. двойная ось сложной симметрии второго рода есть в то же время и плоскость симметрии, и наоборот, всякая плоскость симметрии может быть рассматриваема как двойная ось сложной симметрии второго рода. Так же легко могут быть доказаны следующие положения:

1. $L^n_{2n'}$ при n — четном числе, будет осью сложной симметрии L^n_{2n}, и наоборот.

2. $L^n_{2n'}$ при n нечетном, не будет L^n_{2n}, но всегда будет в то же время и $L_{2'}$, т. е. в этом случае непременно должна быть плоскость симметрии, перпендикулярная к $L^n_{2n'}$.

Таким образом, если у нас имеется $L^n_{2n'}$ и n — нечетное число, то такая ось сложной симметрии второго рода будет равнозначна оси симметрии L^n и перпендикулярной к ней плоскости симметрии P.

В самом деле, (рис. 23) положим, у нас имеется ось симметрии L^n, причем n — нечетное число и плоскость симметрии $P \perp L^n$. Сделав поворот некоторой точки a вокруг L^n на элементарный угол $\frac{2\pi}{n}$, найдем точку a_1. Отразив полученную точку a_1 в плоскости P, найдем точку a_2. Соединив прямой $a_2 O$ полученную точку a_2 и точку O пересечения плоскости симметрии с осью L^n, а затем продолжив $a_2 O$ по другую сторону от точки O, найдем точку a_3, удовлетворяющую условию $a_2 O = O a_3$. Если n — нечетное число, то точка a_3 не будет существовать в виде реальной точки, но реальная точка a_4 будет находиться в плоскости, перпендикулярной к L^n и проходящей через a_1 и a_3, причем угол $a_3 O_1 a_4 = \frac{\pi}{n}$. Таким образом, из каждой реальной точки в симметричной системе, имеющей L^n и P можем получить реальную точку, путем вращения исходной точки a на угол $\frac{\pi}{n}$ и операции центра обратного равенства, что равнозначно присутствию $L^n_{2n'}$. Чтобы вывести из точки a точку a_1 путем операции, связанной с $L^n_{2n'}$, мы должны будем сделать поворот вокруг оси $L^n_{2n'}$ на угол $\pi + \alpha$ (где α — элементарный угол поворота для L^n) и произвести операцию центра обратного равенства или другими словами сделать:


Рис. 23.

$$\frac{2\pi}{\alpha} + 2 = n + 2 \text{ операций соответсвующих } L^n_{2n'}.$$

12. ЦЕНТР СИММЕТРИИ.

Данная симметричная фигура конечных размеров может обладать или одним единственным элементом симметрии или несколькими. Если симметричная фигура конечных размеров обладает несколькими элементами симметрии, то, прежде всего, возникает вопрос о взаимном расположении этих элементов симметрии, а также о той связи, которая существует между ними.

Положим, данная симметричная пространственная фигура конечных размеров имеет две оси симметрии, не пересекающиеся друг с другом и не параллельные одна другой. Обозначим первую ось L^{n_1}, а вторую — L^{n_2}. Произведя вращение оси L^{n_2} вокруг оси L^{n_1} на элементарный угол поворота, соответствующий этой оси, получаем третью ось L^{n_3}, равную по наименованию оси L^{n_2}, но по положению не совпадающую с этой последней. Таким образом, из двух осей симметрии L^{n_1} и L^{n_2} мы выводим третью ось L^{n_3}.

Если $n_1 > 1$, то мы можем вывести последовательно, продолжая вращение оси L^{n_2} вокруг оси L^{n_1} каждый раз на элементарный угол поворота, ряд новых осей L^{n_4}, L^{n_5} и т. д. Производя подобные вращения, мы можем из каждых двух осей симметрии вывести бесконечное множество новых осей симметрии, причем эти оси симметрии займут различные положения в пространстве и вообще не будут пересекаться друг с другом. Ясно, что фигура конечных размеров не может обладать бесконечным множеством не пересекающихся между собой осей симметрии. В виду этого, в конечной фигуре все оси симметрии должны пересекаться в одной точке.

Путем совершенно аналогичных рассуждений мы можем притти к заключению, что вообще в симметричных фигурах конечных размеров все элементы симметрии должны непременно пересекаться по одной прямой линии или в одной точке, причем такая точка называется центром симметрии фигуры.

13. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИММЕТРИЕЙ СОВМЕЩЕНИЯ И ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ.

Положим, в пространственной фигуре конечных размеров у нас имеется две плоскости симметрии, пересекающиеся между собой по некоторой прямой OO_1 и перпендикулярные к плоскости чертежа рис 24. Пусть эти плоскости пересекут плоскость чертежа по прямым OS_1 и OS_2, образующим между собой угол α, причем точка O будет точкой пересечения этих линий. Точка O будет представлять собою точку пересечения линии OO_1, перпендикулярной к плоскости чертежа с этой последней плоскостью.

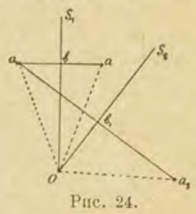


Рис. 24.

Возьмем некоторую точку a фигуры, лежащую в плоскости чертежа рис. 24, и построим ее изображение в зеркальной плоскости OS_1. В виду того, что эта последняя плоскость перпендикулярна к плоскости чертежа рис. 24, точка a_1 — зеркальное изображение точки a — будет находиться в той же плоскости чертежа.

Для нахождения точки a_1 опускаем из точки a перпендикуляр ab на линию OS_1 и на продолжении этого перпендикуляра по другую сторону линии OS_1 откладываем отрезок $a_1b = ab$. Полученная таким образом точка a_1 будет зеркальным изображением точки a. Построим теперь изображение точки a_1, отразив ее в зеркальной плоскости OS_2. Для получения этого изображения поступаем аналогичным образом, как и для нахождения точки a_1. Построив изображение, находим точку a_2. Точка a_2 будет зеркальным изображением точки a_1, а так как точка a_1, в свою очередь, служит зеркальным изображением точки a, то точки a и a_2 будут тождественны друг другу.

Соединив точку O прямыми с точками a, a_1 и a_2, получаем прямоугольные треугольники: Oba, Oba_1, Ob_1a_1 и Ob_1a_2. Обозначим: $\angle aOb = \beta$. Так как $\angle S_1OS_2 = \alpha$, то $\angle aOb_1 = \alpha - \beta$. В виду равенства прямоугольных треугольников Oba и Oba_1, имеющих общий катет Ob и два другие катета ab и a_1b, равные по построению, мы заключаем о равенстве линий Oa и Oa_1, а также о равенстве $\angle a_1Ob = \angle aOb = \beta$.

Из аналогичного равенства прямоугольных треугольников Ob_1a_1 и Ob_1a_2 заключаем о равенствах:

$$a_1O = a_2O \text{ и } \angle a_1Ob_1 = \angle b_1Oa_2.$$

Но

$$\angle a_1Ob_1 = \angle a_1Ob + \angle aOb + aOb_1 = \beta + \beta + (\alpha - \beta) = \alpha + \beta.$$

Так как $\angle aOa_2 = \angle a_1Ob_1 + \angle aOb_1$,

то, подставляя в это равенство вместо $\angle a_1Ob_1$ найденную для него величину $\alpha + \beta$, а вместо $\angle aOb_1$ его величину, равную $\alpha - \beta$, находим:

$$\angle aOa_2 = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha.$$

Таким образом, мы видим, что угловое расстояние между линиями Oa и Oa_2 равно 2α.

В виду равенства линий Oa и Oa_2 мы можем совместить точку a с точой a_2, произведя поворот точки a на угол 2α вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа рис. 24 и пересекающей эту плоскость в точке O, т. е. вокруг линии пересечения данных плоскостей симметрии OS_1 и OS_2.

Таким образом, мы видим, что линия пересечения двух плоскостей симметрии фигуры, образующих между собой двугранный угол α, будет в то же время и осью симметрии с элементарным углом поворота, равным 2α.

Этим положением устанавливается общая связь между плоскостью симметрии и осью симметрии, находящейся в этой плоскости. Эту связь можно формулировать таким образом: Если у нас имеется плоскость симметрии и ось симметрии L^n, лежащая в этой плоскости, то данная симметричная фигура будет иметь n плоскостей симметрии, пересекающихся в оси L^n, причем наименование оси $n = \frac{2\pi}{2\alpha}$.

14. РАВНОДЕЙСТВУЮЩИЕ ОСИ СИММЕТРИИ.

Мы уже видели, что в том случае, если симметричная фигура конечных размеров обладает несколькими элементами симметрии, все эти элементы пересекаются в центре симметрии фигуры. Положим, что при рассмотрении данной симметричной фугуры мы нашли две оси симметрии P и Q, которыми обладает эта фигура, причем ось P имеет наименование p, а ось Q — наименование q.

Произведя поворот вокруг оси P на некоторый угол $k \cdot \frac{2\pi}{p}$, кратный элементарному углу поворота, соответствующему этой оси, мы получим совпадение друг с другом всех симметричных частей данной фигуры. Точно также, произведя поворот вокруг оси Q на угол $l \cdot \frac{2\pi}{q}$, где l — целое число, получаем опять совпадение равных частей фигуры друг с другом. Если мы сделаем сначала поворот вокруг оси P на угол $\frac{2\pi}{p} \cdot k$, а затем вокруг оси Q на угол $\frac{2\pi}{q} \cdot l$, то в результате таких поворотов мы снова получим совмещение всех равных частей фигуры друг с другом. Такое совмещение мы вообще можем получить только в том случае, если повернем фигуру вокруг некоторой оси симметрии на угол, кратный элементарному углу поворота, соответствующему этой оси. В виду этого, мы можем заменить повороты вокруг осей P и Q поворотом вовокруг некоторой третьей оси R наименования r на угол $\frac{2\pi}{r} \cdot m$, кратный элементарному углу поворота, соответствующему оси R. Так как результат вращения вокруг оси R на угол $\frac{2\pi}{r} \cdot m$ будет совершенно тождественен с результатом последовательного вращения вокруг осей P и Q на соответственные им углы $\frac{2\pi}{p} \cdot k$ и $\frac{2\pi}{q} \cdot l$, то ось R будет называться равнодействующей осей симметрии P и Q. Если мы сделаем поворот вокруг оси P на угол $\frac{2\pi}{p} \cdot k_1$, а вокруг оси Q на угол $\frac{2\pi}{q} \cdot l_1$, то мы для этого случая должны найти некоторую другую равнодействующую ось симметрии R_1 наименования r_1.

Положим, у нас имеются две данные оси P и Q наименований p и q и их равнодействующая R наименования r. В таком случае, после поворота вокруг оси P на угол $\frac{2\pi}{p}$, все точки фигуры, кроме точек, лежащих на оси P, переместятся и займут некоторое новое положение. Также новое положение займут и оси Q и R. При таком перемещении

эти оси будут двигаться в пространстве, как образующие двух прямых круглых конусов, с общей осью вращения P.

Положим, после вращения всех точек фигуры вокруг оси P на угол $\frac{2\pi}{r}$, равнодействующая R займет положение R^1, а после вращения всех точек фигуры вокруг оси Q линия R^1 переместится в новое положение R^{11}. Если только R будет равнодействующей осью симметрии, то это будет обозначать, что вращением вокруг оси R на определенный угол поворота $\frac{2\pi}{r} \cdot m$ можно заменить вращение вокруг двух осей P и Q. Таким образом, вместо первого вращения вокруг оси P и последующего вращения вокруг оси Q мы можем произвести одно вращение вокруг оси R которая, следовательно, может быть равнодействующей только в том случае, если она после двух вращений будет находиться на том же месте, какое она занимала до вращения фигуры вокруг осей P и Q. Из этого рассуждения мы заключаем, что линия R^{11} должна совпасть с линией R.

Представим себе (рис. 25), что у нас имеются две оси симметрии OP и OQ, наименования p и q, характеризующиеся элементарными углами поворота $\frac{2\pi}{p}$ и $\frac{2\pi}{q}$, причем точка O пересечения этих осей будет в то же время служить центром некоторого шара. Допустим, что OR будет равнодействующей осью для осей OP и OQ, при условии поворота вокруг каждой из этих осей в одну и ту же сторону на один элементарный угол, соответствующий данной оси.

Рис. 25.

Сделав поворот вокруг оси OP по движению часовой стрелки (если смотреть от точки P по направлению PO) на элементарный угол поворота $\frac{2\pi}{p}$, мы переместим ось OQ в положение OQ_1, а ось OR — в положение OR_1. Произведя вращение вокруг оси OQ_1 по часовой стрелке на соответствующий ей элементарный угол поворота $\frac{2\pi}{q}$, мы приведем ось

OP в новое положение OP_1, причем равнодействующая ось должна из положения OR_1 снова возвратиться в свое первоначальное положение, т. е. совпасть с линией OR. При таких вращениях оси будут описывать конические поверхности, которые пересекутся со сферой по дугам малых кругов, изображенных в перспективе на рисунке 25 пунктиром.

Так как два круга на сфере пересекаются только в двух точках, то равнодействующая OR, передвинувшись по кругу RR_1, перпендикулярно к плоскости которого проходит ось OP, и заняв положение OR_1, может быть возвращена в свое первоначальное положение движением по кругу, перпендикулярному к оси OQ_1, только в том случае, если точки R и R_1 будут точками пересечения этих кругов.

Проведя плоскость через оси P и Q_1 мы найдем, что два положения равнодействующей R и R_1 будут симметричны относительно этой плоскости.

Для определения двух положений OR и OR_1 равнодействующей оси мы должны были сделать два поворота: 1) на угол $\frac{2\pi}{p}$ вокруг оси OP и 2) на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг оси OQ_1.

Проведем плоскости через оси OP и OQ_1; OP и OR_1; OP и OR; OQ_1 и OR, а также через оси OQ_1 и OR_1. Эти пять плоскостей, проходящих через центр шара, пересекаясь с сферической поверхностью, образуют, в общем случае, между точками P, Q_1, R и R_1 два сферических треугольника PRQ_1 и PR_1Q_1, имеющих общую сторону PQ_1. По построению, угол $RPR_1 = \frac{2\pi}{p}$, а угол $RQ_1R_1 = \frac{2\pi}{q}$. Так как положение точек R и R_1 должно быть симметрично относительно дуги большого круга PQ_1, а такая симметричность может быть осуществлена только в том случае, если угол RPQ_1 равен углу R_1PQ_1, а также если $\angle RQ_1P = \angle R_1Q_1P$. Таким образом, мы заключаем, что

$$\angle RPQ_1 = \angle R_1PQ_1 = \frac{\pi}{p} \text{ и } \angle RQP = \angle R_1Q_1P = \frac{\pi}{q}.$$

Если мы сделаем первый поворот вокруг оси OQ, а второй вокруг оси OP на углы $\frac{2\pi}{q}$ и $\frac{2\pi}{p}$, то мы найдем некоторую

равнодействующую OR', по своему значению одинаковую с осью R, но занимающую другое положение в фигуре, причем обе эти оси R и R' будут расположены симметрично относительно плоскости, проходящей через данные оси P и Q.

Таким образом, для каждой пары данных осей симметрии P и Q, при данных углах поворота вокруг этих осей, мы выведем всегда две равнодействующие оси R и R', расположенные симметрично по отношению к плоскости, проведенной через данные оси P и Q.

Для каждого поворота вокруг осей P и Q на углы $\frac{2\pi}{p} \cdot m$ и $\frac{2\pi}{q} \cdot n$, где m и n — целые числа, мы выведем две равнодействующие оси R_{mn} и R'_{mn}, причем постоянно при таком выводе мы будем иметь два положения для каждой равнодействующей. Оба эти положения будут симметричны по отношению к плоскости, проходящей через оси P и Q. Из этих двух положений то, которое получено вращением вокруг первой оси, не будет соответствовать истинному положению равнодействующей оси, так как оно отличается от ее первоначального положения. Между тем, по самой сущности равнодействующей оси, она должна после поворотов вокруг данных осей оказаться в том же положении, в котором она была до начала вращения вокруг осей P и Q.

Из предшествующих рассуждений мы можем вывести общее правило нахождения положения пары равнодействующих осей симметрии R и R' для двух данных осей P и Q.

Для нахождения положения равнодействующих осей R и R' проводим плоскость через данные оси P и Q. Эта плоскость должна делить пополам двугранные углы $\frac{2\pi}{p} \cdot m$ и $\frac{2\pi}{q} \cdot n$, имеющие своими ребрами оси P и Q. Линии пересечения граней этих двугранных углов дадут положение равнодействующих осей R и R'. Рассматривая сферический треугольник PQR, мы видим, что в общем случае $\angle QPR = \frac{\pi}{p} \cdot m$, а $\angle PQR = \frac{\pi}{q} \cdot n$. Что касается угла PRQ, то этот угол также должен быть равен $\frac{\pi}{r} \cdot k$, где k — целое число. В этом

4*

легко убедиться, приняв оси P и R за данные, характеризующиеся углами поворотов $\frac{2\pi}{p}\cdot m$ и $\frac{2\pi}{r}\cdot k$. Произведя построения, аналогичные только что описанным, найдем оси Q и Q', которые и будут равнодействующими для данных осей P и R.

Таким образом, углы сферического треугольника PQR будут всегда по величине кратными половин элементарных углов для осей P, Q и R, причем каждая из этих трех осей будет равнодействующей двух других.

15. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СЛОЖЕНИЯ ОСЕЙ СИММЕТРИИ.

Наиболее простым случаем будет тот, когда нам даны две двойные оси симметрии, образующие между собой некоторый угол $\alpha \leqq 90^0$, причем $\frac{2\pi}{\alpha}=2n$ или $\frac{\pi}{\alpha}=n$, где n — целое число. В этом случае, в качестве равнодействующей оси, найдем ось L^n, перпендикулярную к плоскости, проходящей через две данные двойные оси симметрии. В этом легко убедиться, произведя указанные выше построения для нахождения положения равнодействующей оси симметрии.

Две данные двойные оси симметрии, вообще говоря, могут быть или равны или не равны друг другу. В случае их неравенства, они должны иметь равные концы, а в случае их равенства, разные концы одной и той же оси симметрии будут не равны между собой.

В случае неравенства данных осей, наименование n равнодействующей оси симметрии должно быть четным числом, а в случае их равенства, n — нечетное число. В этом легко убедиться на основании следующего рассуждения.

Представим себе ось симметрии L^n, наименования n, и перпендикулярную к ней двойную ось симметрии L^2. Пусть эти оси симметрии пересекаются в точке O. Вращая ось L^2 вокруг оси симметрии L^n, найдем еще n — двойных осей симметрии в том случае, если n будет нечетным числом, причем разные концы каждой из найденных двойных осей симметрии не будут равны друг другу, но оси будут равны между

собой. Каждые две ближайшие друг к другу двойные оси симметрии будут иметь различные концы, направленные в одну сторону, причем равные концы будут чередоваться с неравными через один. В этом случае при вращении вокруг оси L^n на угол, меньший 2π, мы ни разу не получим совмещения двойной оси симметрии самой с собой.

Если же n — четное число, то при повороте вокруг оси L^n на 180^0 мы получим совмещение самих с собой разных концов каждой из двойных осей симметрии. Ясно, что такое совмещение может произойти только в том случае, если совмещающиеся концы равны друг другу. Кроме того, в этом случае мы ни разу не получим совмещения двух двойных осей симметрии, образующих между собой угол $k\alpha$, где k — нечетное число.

Для иллюстрации обоих этих случаев, на рис. 26 *a* изображен комплекс двойных осей симметрии, причем перпендикулярно к плоскости чертежа в точке O проходит L^5; одинаковые концы осей отмечены одинаковыми кружками. На рис. 26 *b* изображен комплекс осей, выведенный из двух данных двойных осей симметрии, взятых под углом 30^0 друг к другу. В этом случае, перпендикулярно к плоскости чертежа, через точку O проходит L^6. Разные оси на чертеже отмечены разными кружками.

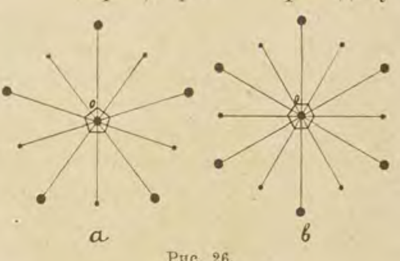


Рис. 26.

Из только что изложенного ясно, что в том случае, когда нам даны две двойные оси симметрии (образующие между собой угол меньший 90^0), мы получаем комплекс осей, состоящий из некоторого определенного количества двойных осей симметрии и одной единственной оси симметрии наименования выше чем два. Все двойные оси симметрии такого комплекса лежат в одной плоскости, к которой перпендикулярна ось симметрии высшего наименования.

Если нам даны две оси симметрии, наименования выше чем два L^p и L^q, пересекающиеся в точке O, то мы из этих

двух данных выведем всегда такой комплекс осей симметрии, в котором будет определенное количество равных осей симметрии, наименования выше чем два. В самом деле, вращая ось симметрии L^q вокруг оси L^p, мы выведем в общем случае p осей симметрии L^q, а вращая ось L^p вокруг оси L^q, найдем кроме данной еще $q-1$ осей симметрии наименования p. Таким образом, в случае нахождения в комплексе двух осей симметрии наименования выше чем два, мы имеем дело с комплексом, обладающим несколькими равными осями симметрии, причем каждая из имеющихся в комплексе осей симметрии будет иметь равные себе оси симметрии, принадлежащие к тому же комплексу. Представим себе теперь один из таких комплексов осей симметрии и положим, что центр симметрии этого комплекса будет в то же время центром некоторого шара диаметра R. Комплекс осей пересечет поверхность шара в некоторых точках. Соединив каждые две ближайшие друг к другу точки дугами больших кругов, получим на сферической поверхности систему сферических треугольников, выполняющих данную шаровую поверхность. Каждому из возможных комплексов осей симметрии будет соответствовать особая система сферических треугольников, причем общая совокупность таких треугольников должна выполнить всю поверхность сферы без промежутков. Таким образом, вопрос о выводе комплекса осей симметрии из двух данных осей L^p и L^q, где $p>2$ и $q>2$, сводится к делению поверхности шара на сферические треугольники, выполняющие эту поверхность без промежутков. Для большего удобства и простоты вывода такого деления поверхности шара на сферические треугольники мы можем за данные принять две равные оси симметрии L^p, где $p>2$.

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда нам даны две оси симметрии наименования 3, т. е. когда мы имеем как данные $2L^3$. В этом случае наименьшее число равных тройных осей симметрии будет 4, так как, вращая первую из двух данных тройных осей симметрии вокруг второй данной оси L^3, получим всего три тройных оси, расположенных под одинаковыми углами к второй данной L^3. Кроме того, в виду равенства обоих данных осей, углы между ближайшими осями

должны быть равны друг другу. Так как обе данные оси нечетного наименования, то мы можем предположить, что разные концы одной и той же оси не равны друг другу. При таком предположении мы можем соединить дугами больших кругов только ближайшие равные между собой концы имеющихся в комплексе тройных осей симметрии, и в результате такого построения поверхность шара должна разделиться на четыре равносторонних сферических треугольника, выполняющих ее без промежутков.

В случае равенства между собой обоих концов одной и той же тройной оси мы получим деление сферы на 8 равносторонних треугольников.

Если в комплексе будет nL^3, причем $n > 4$, то мы, произведя указанное выше построение, разделим сферическую поверхность на n равносторонних сферических треугольников и эти треугольники также должны заполнить всю поверхность шара без промежутков. Таким образом в этом случае нам необходимо решить вопрос о том, каким образом возможно разделить поверхность шара на равносторонние сферические треугольники так, чтобы эти треугольники выполнили всю поверхность сферы без промежутков.

Предположим, что мы имеем возможность разделить поверхность шара на n равносторонних сферических треугольников. Для такого деления необходимо, чтобы отношение всей поверхности сферы к поверхности каждого из равносторонних треугольников равнялось числу этих треугольников. Обозначим s — поверхность каждого равностороннего сферического треугольника. При радиусе шара $R = 1$, имеем для выражения поверхности сферы: 4π; откуда

$$\frac{4\pi}{s} = n. \qquad (1)$$

Обозначив величину угла равностороннего треугольника через α, мы будем иметь для выражения поверхности равностороннего треугольника

$$s = 3\alpha - \pi. \qquad (2)$$

Подставив в выражении $\frac{4\pi}{s} = n$, вместо s величину из уравнения (2), получаем:

$$\frac{4\pi}{3\alpha - \pi} = n, \quad \text{откуда} \quad 3\alpha - \pi = \frac{4\pi}{n}.$$

Решая это уравнение для α, находим:

$$\alpha = \frac{4+n}{3n}\pi. \tag{3}$$

Заметим, что при выполнении поверхности сферы равносторонними треугольниками необходимо соблюсти то условие, чтобы при каждой точке пересечения сторон треугольников, выполняющих сферу, сходилось некоторое целое число углов сферических треугольников. Это условие аналитически может быть выражено:

$$\frac{2\pi}{\alpha} = t, \tag{4}$$

где t — целое число. В самом деле, величина угла вокруг точки равна 2π при $R = 1$, а так как величина каждого угла треугольника при той же точке равна α, то отсюда и выводим равенство (4), которое, принимая во внимание равенство (3), может быть представлено в виде:

$$\frac{6n}{4+n} = t. \tag{5}$$

Выражение (5) мы можем рассматривать как неопределенное уравнение, в котором n и t могут быть только целыми числами. Так как каждый угол равностороннего сферического треугольника меньше π, то отсюда следует, что при каждой точке пересечения сторон таких треугольников должно сходиться более 2-х углов, т. е. $t > 2$. Для решенияя уравнения (5) в целых и положительных числах представим его в виде:

$$n = \frac{4t}{6-t}. \tag{6}$$

Величина t должна быть меньше 6, так как при $t = 6$ мы получим $n = \infty$, а при $t > 6$ получим для n отрицательное значение, что по условию рассматриваемого вопроса невозможно. Таким образом t может быть 3, 4 или 5, что дает для n следующие значения:

при $t = 3$ $\quad n = 4$

$t = 4$ $\quad n = 8$

$t = 5$ $\quad n = 20.$

Таким образом, сферу можно выполнить:

1. 4-мя равносторонними треугольниками с углами

$$\frac{2}{3}\pi = 120^0,$$

2. 8-ью равносторонними треугольниками с углами

$$\frac{\pi}{2} = 90^0,$$

3. 20-ью равносторонними треугольниками с углами

$$\frac{2}{5}\pi = 72^0.$$

1. Если разделить поверхность шара на четыре равносторонних сферических треугольника (рис. 27), то каждая вершина каждого такого треугольника будет общей для трех равных друг другу треугольников. Вследствие этого, через каждую вершину будет проходить тройная ось симметрии. Так как общее количество вершин будет равно количеству треугольников, выполняющих сферу, умноженному на 3 (соответственно числу вершин в каждом треугольнике) и деленному на число треугольников, сходящихся при одной вершине, т. е. в нашем случае 3, то мы находим, что общее количество точек выхода тройных осей симметрии в вершинах треугольников будет 4. Если провести через одну из таких вершин и через центр шара прямую, то мы увидим, что такая прямая пересечет поверхность шара, кроме той вершины, через которую она проведена, еще в центре одного из четырех равносторонних сферических треугольников. В виду этого, мы будем иметь всего 4 тройных оси симметрии, с различными концами. Один конец каждой L^3 будет выходить в вершине, а другой в центре равностороннего сферического треугольника. Взяв две ближайшие из этих 4-х осей симметрии и поступая по изложенному выше правилу

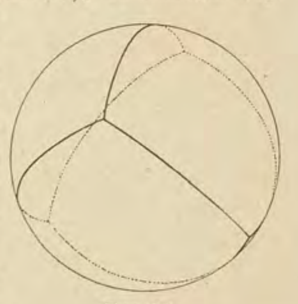


Рис. 27.

нахождения равнодействующих осей, найдем в качестве равнодействующих три двойных оси симметрии. Таким образом, комплекс осей симметрии для этого случая будет $3\,L^2\,4\,L^3$.

2. В случае выполнения сферической поверхности восемью сферическими треугольниками (рис. 28) при каждой вершине сходится 4 равных сферических треугольника. Таким образом, количество отдельных точек на сфере, соответствующих вершинам треугольников, равно $8 \times 3 : 4 = 6$. В каждой такой вершине выходит L^4, причем каждая четверная ось симметрии имеет равные концы и проходит через 2 вершины. Таким образом, мы в этом случае имеем 3 четверных оси симметрии. В качестве равнодействующих выводим $4\,L^3$ и $6\,L^2$. Полный комплекс осей симметрии для этого случая определяется $3\,L^4\,4\,L^3\,6\,L^2$. Каждая тройная ось симметрии будет проходить через центры двух сферических треугольников. Двойные оси симметрии будут располагаться в плоскостях, проведенных через две ближайшие одноименные оси симметрии, следовательно, будут делить пополам дуги, образующие стороны сферических треугольников.

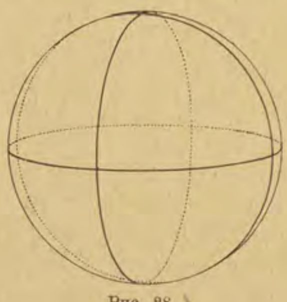

Рис. 28.


Рис. 29.

3. Если разделить поверхность шара на 20 равносторонних сферических треугольников (рис. 29), то в каждой вершине будет сходиться 5 равных сферических треугольников. Число вершин будет $30 \times 3 : 5 = 12$. В каждой вершине выходит L^5, проходящая через две вершины. Тройные оси симметрии проходят через центры сферических треугольников, причем каждая такая ось проходит через центры двух треуголь-

ников. Двойные оси симметрии проходят через середины сторон сферических треугольников. Так как каждая сторона является общей для двух сферических треугольников, то полное количество всех сторон будет равно $20 \times 3 : 2 = 30$. В виду того, что каждая двойная ось симметрии будет проходить через две стороны, общее количество всех двойных осей симметрии будет 15. Таким образом, общий комплекс осей симметрии для этого случая выразится формулой:

$$6\,L^5\ 10\,L^3\ 15\,L^2$$

16. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖЕНИЯ ОСИ И ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ.

Рассмотрим теперь тот случай, когда в симметрической системе имеется плоскость симметрии и ось симметрии, образующая с данной плоскостью симметрии произвольный угол. В этом случае, вообще говоря, равнодействующим элементом симметрии не может служить ось симметрии, так как, вследствие присутствия в системе плоскости симметрии, мы имеем зеркальные изображения симметричных частей, не совмещающиеся друг с другом путем вращения вокруг какой бы то ни было оси. Точно так же равнодействующим элементом не может служить и плоскость симметрии, так как мы имеем прямое повторение частей симметрической системы благодаря присутствию оси симметрии.

Таким образом, в рассматриваемом случае равнодействующим элементом симметрии может служить только такой элемент, в котором имеется сочетание симметрических преобразований, связанных с осью и плоскостью симметрии т. е. ось сложной симметрии.

Положим (рис. 30), нам дана плоскость симметрии UV и ось симметрии OP. Допустим, что равнодействующая ось сложной симметрии действительно существует и пусть эта ось изобразится линией OR, причем плоскость SOQ', перпендикулярная к OR, будет плоскостью сложной симметрии.

Если ось сложной симметрии OR будет действительно равнодействующей осью, то из самого понятия о равнодействующей мы можем вывести следующие заключения.

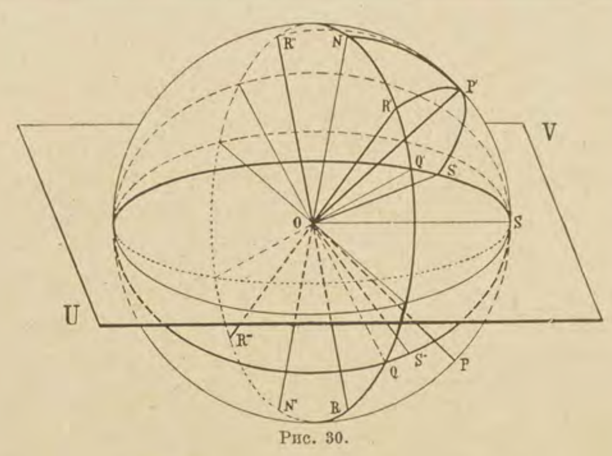


Рис. 30.

1) Отражение в данной плоскости симметрии UV и вращение вокруг оси OP можно заменить одним симметрическим преобразованием, характеризующимся присутствием оси сложной симметрии OR, т. е. вращением вокруг этой оси и отражением в плоскости сложной симметрии SOQ'. 2) После отражения в плоскости симметрии UV и поворота на элементарный угол вокруг оси OP, ось сложной симметрии OR должна оказаться на том же месте, где она была до производства симметрических преобразований. Однако, в виду того, что OR — ось сложной симметрии, она после каждой, связанной с ней, симметрической операции должна отразиться в перпендикулярной к ней плоскости сложной симметрии, причем ее нижний конец приходит в совмещение с верхним и наоборот. В самом деле, произведя отражение в плоскости симметрии UV и вращение вокруг оси симметрии OP на соответствующий ей элементарный угол поворота $\frac{2\pi}{p}$ (где p — наименование оси OP), мы приведем данную симметрическую систему из первоначального в новое положение. В это же новое положение из первоначального мы можем привести нашу систему путем симметрического преобразования, связанного с осью сложной симметрии OR, а такое преобразование содержит в себе поворот вокруг оси

OR и отражение в плоскости SOQ', причем разные концы оси OR совмещаются друг с другом.

Отразив оси OP и OR в данной плоскости симметрии UV, получим соответственно линии OP' и OR'. Эти линии также будут осями симметрии. Повернем ось OR вокруг оси OP' на элементарный угол поворота, соответствующий оси OP, т. е. на угол $\frac{2\pi}{p}$. Допустим, что ось OR' займет после такого вращения положение OR''.

Если после отражения в плоскости симметрии UV ось OR заняла положение линии OR', которая в свою очередь после поворота вокруг оси OP' на угол $\frac{2\pi}{p}$ пришла в положение OR'', то линия OR'' должна непременно совпасть с линией OR, т. е. служить ее продолжением по другую сторону плоскости симметрии UV. Из этого заключаем, что линия RR'' — прямая.

Проведем через две пересекающиеся в точке O линии OR и OR' плоскость. Эта плоскость ROR' будет перпендикулярна к плоскости симметрии UV. В самом деле, если бы плоскость ROR' не была перпендикулярна к плоскости UV, то, отразив в этой последней какую угодно точку плоскости ROR', мы получили бы изображение этой точки вне плоскости ROR'. Между тем, при отражении линии OR в плоскости UV мы получили линию OR', лежащую в той же плоскости ROR'. Это могло быть только в том случае, если плоскости UV и ROR' взаимно перпендикулярны.

Очевидно, что, восставив перпендикуляр ON к плоскости UV в точке O, мы будем иметь линию ON, находящуюся в той же плоскости ROR'.

В пересечении двух взаимно перпендикулярных плоскостей UV и ROR' мы имеем прямую, которая будет перпендикулярна к линии NON'.

На основании общих законов отражения в зеркальных плоскостях мы имеем: $\angle NOR'' = \angle N'OR'''$. Мы видели, что линии $N'O$ и ON — отрезки одной и той же прямой NN', а линии $R'O$ и OR''' являются отрезками прямой $R'R'''$. Таким образом, мы имеем две прямые линии NN' и $R'R'''$,

пересекающиеся в точке O. $\angle R'ON = \angle R'''ON'$, как противоположные. Кроме того, мы уже раньше вывели равенство углов $R''ON$ и $R'''ON'$. В виду этого, мы имеем: $\angle R'ON = \angle R''ON = \angle R'''ON'$.

Опишем вокруг точки O сферическую поверхность радиусом OR. Плоскость ROR' даст в сечении со сферой дугу большого круга, изображенную на рис. 30 эллипсисом $RN'R'''R''NR'$. Проведем 3 плоскости через линии 1) OP' и ON, 2) OP' и OR' и 3) OP' и OR''. Эти плоскости пересекутся со сферой по дугам больших кругов: первая — по дуге NP', вторая — по дуге $R'P'$ и третья — по дуге $R''P'$.

Рассмотрим сферические треугольники $NP'R'$ и $NP'R''$. Стороны NR' и NR'' этих треугольников равны между собой вследствие равенства углов NOR' и NOR''. Так как линия OR'' получена путем вращения линии OR' вокруг оси OP', то точки R'' и R' находятся на одинаковом расстоянии от точки P' и стороны $R''P'$ и $R'P'$ равны между собой. В виду того, что NP' — сторона общая для обоих сферических треугольников $R''P'N$ и $R'P'N$, мы заключаем о равенстве этих треугольников, а также и о равенстве углов $R'P'N$ и $R''P'N$, откуда вытекает $\angle P'NR' = \angle P'NR''$. Так как эти последние углы лежат при одной и той же точке N по одну сторону дуги большого круга $R'R''$, то углы $P'NR'$ и $P'NR''$ — прямые. Так как линия ON перпендикулярна к плоскости UV, то плоскость $NP'S$ перпендикулярна к двум плоскостям, а именно 1) к плоскости симметрии UV и 2) к плоскости $R'NR'$, т. е. к плоскости, проходящей через равнодействующие оси OR и OR'.

В виду доказанного ранее равенства рассмотренных нами двух сферических треугольников, мы имеем $\angle NP'R' = \angle NP'R''$. Принимая во внимание, что мы получили линию OR'', произведя поворот линии OR' вокруг оси OP' на элементарный угол поворота $\frac{2\pi}{p}$, мы заключаем:

$$\angle NP'R' = \angle NP'R'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{p},$$

т. е. половине элементарного угла поворота вокруг оси симметрии OP. Вполне очевидно, что отразив в данной плоскости симметрии UV сферические треугольники $NP'R'$ и $NP'R''$, мы получим равные им треугольники $N'PR$ и $N'PR'''$.

Из всего вышеизложенного непосредственно вытекает способ нахождения равнодействующей оси сложной симметрии OR путем построения, если известно относительное положение данных оси симметрии OP и плоскости симметрии UV. Построение это следующее: через данную ось симметрии проводим плоскость, перпендикулярную данной плоскости симметрии. Проведя через центр симметрии O плоскость, перпендикулярную к только что построенной плоскости и к данной плоскости симметрии UV, находим плоскость равнодействующих осей. Для определения положения этих осей, в найденной плоскости строим два двугранных угла $\frac{\pi}{p}$, приняв за общее ребро данную ось симметрии и за общую грань — плоскость, проходящую через эту ось и перпендикулярную данной плоскости симметрии. Линии пересечения построенных граней двугранных углов с плоскостью равнодействующих осей и будут искомыми осями сложной симметрии. В общем случае, очевидно, мы будем иметь по крайней мере две равнодействующие оси сложной симметрии OR и OR'. В виду того, что эти оси образуют одинаковые углы с данной плоскостью симметрии UV, мы заключаем, что и соответствующие им плоскости сложной симметрии SOQ и SOQ' будут образовывать равные двугранные углы с плоскостью UV.

Чтобы определить угол поворота вокруг найденной равнодействующей оси для приведения данной симметричной системы из первоначального положения в конечное, рассмотрим перемещение какой-нибудь линии, лежащей в одной из плоскостей сложной симметрии.

Возьмем линию OS пересечения плоскостей сложной симметрии с данной плоскостью симметрии UV и рассмотрим ее перемещение из первоначального в конечное.

Поворот линии OS вокруг оси OP' на угол $\frac{2\pi}{p}$ переместит эту линию в положение OS'. Последующее отра-

жение линии OS' в плоскости симметрии UV даст линию OS''. Эта последняя линия должна непременно находиться в плоскости сложной симметрии, перпендикулярной к оси OR'. Таким образом, дуга SS'' дает измерение угла поворота вокруг оси OR'. Принимая во внимание одинаковый наклон плоскостей сложной симметрии к данной плоскости симметрии UV, мы заключаем, что $\smile SS'' = \smile SS'$ и угол поворота вокруг оси OR может быть измерен также и дугой SS'.

17. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СЛОЖЕНИЯ ОСИ И ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ.

1) Дана двойная ось симметрии и плоскость симметрии, к ней перпендикулярная.

Найдя по изложенному выше правилу положение равнодействующей оси сложной симметрии, увидим, что эта равнодействующая ось совпадает с данной двойной осью симметрии и ее наименование будет 2, т. е. в качестве равнодействующего элемента для взаимно-перпендикулярных двойной оси и плоскости симметрии мы получаем центр обратного равенства. Так как всякая ось симметрии четного наименования будет в то же время и двойной осью симметрии, то мы отсюда выводим следующее заключение:

Если в симметрической системе имеется ось симметрии четного наименования и перпендикулярная к ней плоскость симметрии, то в данной симметрической системе есть также и центр обратного равенства.

2) Дана плоскость симметрии и образующая с ней угол α двойная ось симметрии.

Найдя положение равнодействующей оси сложной симметрии на основании изложенного выше правила, выведем следующее общее заключение:

Если дана плоскость симметрии и двойная ось симметрии под углом α, то линия, перпендикулярная к двойной оси симметрии и лежащая в данной плоскости симметрии, будет искомой равнодействующей осью сложной симметрии.

18. ВИДЫ СИММЕТРИИ С ОСОБОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ.

Как мы видели выше, из каждых двух данных элементов симметрии мы можем вывести равнодействующие элементы. Если нам дан только один элемент симметрии, то никаких равнодействующих элементов, вообще говоря, мы вывести не можем. Полная совокупность элементов симметрии, выводящаяся из данных элементов, называется видом симметрии. Для вывода всех элементов симметрии, имеющихся в данном виде симметрии, достаточно, вообще говоря, иметь как данные всего три элемента симметрии, расположенных соответственным образом друг относительно друга. Если же в виде симметрии имеются только оси симметрии, то для полного вывода всех, имеющихся в нем, осей симметрии достаточно иметь только две данные оси симметрии.

Приняв это во внимание, мы можем сделать вывод решительно всех возможных видов симметрии. При таком выводе мы будем иметь в виду только те виды симметрии, в которых или совершенно нет центра симметрии или имеется только один центр симметрии. Все возможные виды симметрии мы можем разделить на две группы, на основании рассмотрения имеющихся в них осей симметрии.

1) Виды симметрии, в которых имеются оси симметрии, не совмещающиеся с другими осями симметрии никакими симметрическими преобразованиями.

2) Виды симметрии, в которых все оси симметрии повторяются несколько раз.

К первой группе видов симметрии относятся все те виды симметрии, в которых или совсем не имеется осей симметрии наименования выше чем два или имеется всего только одна такая ось. Приняв за такую особую ось некоторую ось симметрии L^n, мы можем получить семь видов симметрии, прибавляя к этой единственной оси L^n различные элементы симметрии таким образом, чтобы взятая ось не повторилась от прибавления новых элементов симметрии и не изменяла бы своего наименования как ось простой симметрии.

Если мы к данной оси симметрии L^n прибавим плоскость симметрии, расположенную косо по отношению к L^n, то,

отразив данную ось симметрии в прибавленной к ней плоскости симметрии, мы получим повторение взятой оси симметрии L^n, т. е. вместо одной оси L^n у нас будет их две, что противоречит поставленному нами условию. Повторение оси L^n не произойдет только в двух случаях:

1) Если прибавить плоскость симметрии MN, перпендикулярную к взятой оси L^n (рис. 31). В этом случае L^n, отразившись в плоскости симметрии, даст изображение, совпадающее с самой осью L^n. Вид симметрии, соответствующий этому случаю, может быть представлен формулой $L^n P$.

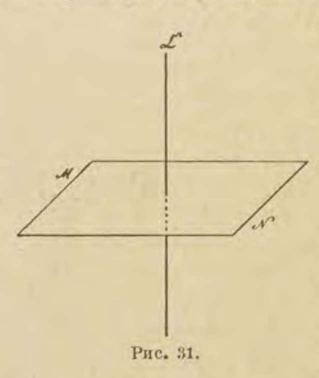


Рис. 31.

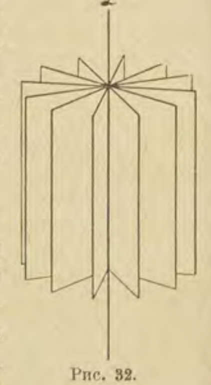


Рис. 32.

2) L^n не повторится, если мы прибавим к ней плоскость симметрии, проходящую через самую ось симметрии L^n. В этом случае, на основании теоремы о сложении плоскостей симметрии, мы получим всего nP и вид симметрии выразится формулой $L^n nP$. (Случай $L^6 6P$ изображен на рис. 32.)

Если мы присоединим к данной оси симметрии L^n еще какую-нибудь ось симметрии наименования выше чем 2, то, при таком прибавлении новой оси симметрии, данная ось непременно повторится некоторое число раз. Такое повторение оси произойдет и в том случае, если мы к данной оси L^n прибавим двойную ось симметрии, расположенную косо по отношению к L^n.

Только в том случае не получится повторения данной оси L^n, если мы прибавим перпендикулярную к ней двойную ось симметрии, так как после вращения L^n вокруг L^2 на 180^0 данная ось совместится сама с собой и для такого совмещения она должна иметь равные концы.

Найдя повторяющиеся двойные оси симметрии и, определив, на основании теоремы о сложении осей симметрии, равнодействующие оси, которые также будут двойными, мы получаем для этого случая вид симметрии, который выражается формулой $L^n n L^2$.

(Случай $L^6\, 6\, L^2$ изображен на рис. 33.)

Прибавив к этому последнему виду симметрии плоскость симметрии, перпендикулярную к данной оси L^n и выведя равнодействующие элементы, мы получим новый вид симметрии, выражающийся формулой:

$$L^n n L^2 (n+1) P$$

(Случай $L^6\ 6\ L^2\ 7\ P$ изображен на рис. 34.)

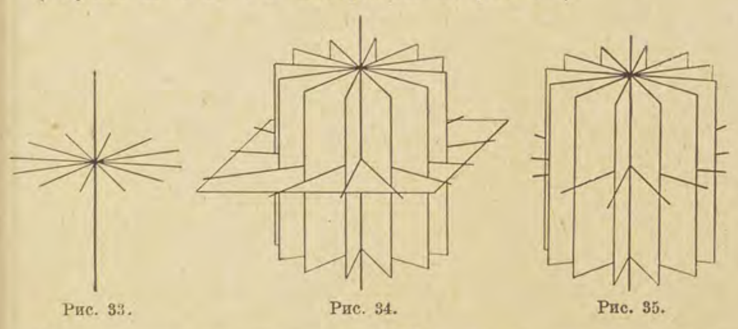


Рис. 33. Рис. 34. Рис. 35.

Если данная ось симметрии L^n в то же время является осью сложной симметрии вдвое большего наименования, то мы выведем новый вид симметрии: L^n_{2n}.

Прибавив к этому виду симметрии плоскость симметрии, проходящую через L^n_{2n}, и выведя равнодействующие элементы симметрии, получаем еще один последний вид симметрии, выражающийся формулой:

$$L^n_{2n}\ n\ L^2\ n\ P.$$

(Случай $L^6_{12}\ 6\ P\ 6\ L^2$ изображен на рис. 35.)

Таким образом, при помощи прибавления к данной оси симметрии L^n плоскостей симметрии и двойных осей симметрии, мы можем получить следующие семь видов симметрии:

1) L^n — одна данная ось симметрии.

2) $L^n P$ — данная ось и перпендикулярная к ней плоскость симметрии, причем в случае, если n — нечетное число, L^n будет осью сложной симметрии второго рода наименования $2n$.

3) $L^n nP$ — n плоскостей симметрии, пересекающихся по прямой, которая и является данной осью симметрии L^n.

4) $L^n nL^2$ — данная ось и n двойных осей симметрии, к ней перпендикулярных и пересекающихся в точке, лежащей на оси L^n.

5) $L^n nL^2 (n+1) P$ — n плоскостей симметрии, пересекающихся в данной оси симметрии L^n; одна плоскость симметрии, перпендикулярная к этой оси и n двойных осей симметрии, являющихся линиями пересечения взаимно-перпендикулярных плоскостей симметрии.

6) L^n_{2n} — одна ось сложной симметрии наименования $2n$.

7) $L^n_{2n} nL^2 nP$ — n двойных осей симметрии, перпендикулярных к оси сложной симметрии L^n_{2n}; n плоскостей симметрии, пересекающихся в оси L^n_{2n} и делящих пополам углы между двойными осями симметрии.

Все эти семь видов симметрии образуют одну n — гональную симметрическую систему. В зависимости от наименования данной оси симметрии мы можем вывести различные симметрические системы. Таким образом, первая группа видов симметрии образует бесконечный ряд симметрических систем. При $n=1$ мы получаем моногональную симметрическую систему; при $n=2$ — дигональную; при $n=3$ — тригональную; при $n=4$ — тетрагональную и. т. д.

19. ВИДЫ СИММЕТРИИ БЕЗ ОСОБОЙ ОСИ СИММЕТРИИ.

Рассмотрим теперь те виды симметрии, которые характеризуются отсутствием осей симметрии, не совмещающихся с другими осями симметрии. К таким видам симметрии относятся те, которые были выведены нами при рассмотрении вопроса о выполнении сферической поверхности равносторон-

ними сферическими треугольниками, а именно следующие виды симметрии:

1) $3L^2 4L^3$ — три равные и взаимно-перпендикулярные двойные оси симметрии и четыре тройные оси симметрии, образующие, с ближайшими двойными осями симметрии, углы в $54^0 44' 08''$.

2) $3L^4 4L^3 6L^2$ — три равные и взаимно-перпендикулярные четверные оси симметрии, четыре тройные оси симметрии, образующие с ближайшими к ним четверными осями симметрии углы в $54^0 44' 08''$ и шесть двойных осей симметрии, образующих с ближайшими тройными осями симметрии углы в $35^0 15' 52''$ и делящих пополам углы между каждыми двумя ближайшими к ним четверными осями симметрии.

3) $6L^5 10L^3 15L^2$ — шесть пятерных, десять тройных и пятнадцать двойных осей симметрии. В каждой плоскости, проведенной через две ближайшие друг к другу двойные оси симметрии, будет находиться всего 5 двойных осей симметрии, расположенных под углами в 36^0 друг к другу. Перпендикулярно к каждой плоскости двойных осей проходит пятерная ось симметрии. Угловые расстояния между ближайшими друг к другу разноименными осями симметрии следующие:

$$L^5 : L^2 = 31^0 43' 07''$$
$$L^5 : L^3 = 37^0 22' 32''$$
$$L^3 : L^2 = 20^0 54' 21''$$

Принимая во внимание, что двойные оси симметрии делят пополам углы между ближайшими одноименными осями симметрии, мы находим угловые расстояния между ближайшими:

$$L^5 : L^5 = 63^0 26' 14''$$
$$L^3 : L^3 = 41^0 48' 42''$$

Если мы, к совокупности элементов симметрии одного из только что перечисленных трех видов симметрии, прибавим плоскость симметрии, не проходящую через две оси симметрии, или прибавим какую-нибудь новую ось симметрии — мы в обоих случаях, выводя равнодействующие элементы сим-

метрии, придем к высшей возможной симметрии, выражающейся формулой:

$$\infty L^{\infty} \infty P.$$

Шар — единственная пространственная геометрическая фигура конечных размеров, обладающая этой симметрией.

Имеется единственная возможность прибавления новых элементов симметрии к одному из трех описанных видов симметрии без перехода к симметрии шара, а именно, различные случаи прибавления плоскостей симметрии, проходящих через данные оси симметрии. Рассмотрим эти случаи каждый в отдельности.

К первому виду симметрии $3\ L^2\ 4\ L^3$ мы можем прибавить плоскость симметрии двояким образом: 1) проведя плоскость через две двойные оси симметрии и 2) проведя плоскость симметрии через ближайшие двойную и тройную оси симметрии.

В первом случае мы получим вид симметрии, выражающийся формулой:

$$3\ L^2\ 4\ L^3\ 3\ Pc.$$

Во втором случае получается вид симметрии:

$$3\ L_4^2\ 4\ L^3\ 6\ P.$$

Прибавление к $3\ L^4\ 4\ L^3\ 6\ L^2$ плоскостей симметрии, проходящих через какие-нибудь ближайшие оси симметрии, дает всего только один вид симметрии, выражающийся формулой:

$$3\ L^4\ 4\ L^3\ 6\ L^2\ 9\ Pc.$$

Точно также и для $6\ L^5\ 10\ L^3\ 15\ L^2$ получаем единственный новый вид симметрии: $6\ L^5\ 10\ L^3\ 15\ L^2\ 15\ Pc$.

Таким образом, мы получаем всего следующие семь видов симметрии:

1) $3\ L^2\ 4\ L^3$ 2) $3\ L^2\ 4\ L^3\ Pc$ 3) $3\ L^2\ 4\ L^3\ 6\ P$

4) $3\ L^4\ 4\ L^3\ 6\ L^2$ 5) $3\ L^4\ 4\ L^3\ 6\ L^2\ 9\ Pc$

6) $6\ L^5\ 10\ L^3\ 15\ L^2$ 7) $6\ L^5\ 10\ L^3\ 15\ L^2\ 15\ Pc$.

Эти семь видов симметрии мы можем разделить на две симметрические системы, взяв за признак такого разделения количество тройных осей симметрии.

I. Тетраэдро-октаэдрическая симметрическая система, состоящая из 5 видов симметрии, каждый с четырьмя тройными осями симметрии.

II. Икосаэдрическая система, состоящая из 2-х видов, каждый с десятью тройными осями симметрии.

Названия симметрических систем в этих случаях производятся от названия тех правильных многогранников, которые обладают соответствующими осями симметрии, являющимися характерным признаком системы.

20. ПОДЧИНЕННОСТЬ ВИДОВ СИММЕТРИИ.

Как мы уже видели при рассмотрении свойств осей симметрии, если число n, выражающее наименование оси L^n может быть разложено на целые взаимно простые множители т. е. $n = m \cdot p \cdot q \ldots$, то данная ось симметрии L^n будет в то же время осью наименования m; p; mp: qmp; $mq \ldots$ и т. д. Например: $L^{24} = L^{2.2.2.3.}$ будет не только осью симметрии наименования 24, но в то же время и L^2, L^3, L^4, L^6, L^8 и L^{12}. Таким образом, в оси L^{24} как бы заключается 7 осей симметрии, совершенно определенных наименований; такое соотношение между осями симметрии мы будем называть подчиненностью одних осей симметрии другим, и можем сказать, что L^{24} подчинены шесть, перечисленных выше, осей. Что касается осей сложной симметрии, то соотношения подчиненности между ними были уже выведены раньше.

Если мы будем с точки зрения подчиненности рассматривать оси симметрии простой и сложной, то увидим, что комбинация $L^{2n}P$, где $P \perp L^{2n}$ является подчиняющей для L^n_{2n}, так как в этой комбинации содержатся все те симметрические преобразования, которые характеризуют L^n_{2n}.

Как пример мы можем взять L^3_6 и L^6P. Из произвольной точки, взятой на расстоянии x от L^3 и y от плоскости сложной симметрии, мы выведем всего 6 точек, находящихся в двух плоскостях, перпендикулярных L^3_6. Из аналогичной точки, находящейся на расстоянии x от L^6 и на расстоянии y от P, при помощи комбинации этих двух элементов симметрии, получается 12 точек, лежащих по 6-ти в двух плос-

костях, перпендикулярных L^6. Совместив L_6^3 с L^6 и плоскость сложной симметрии с P, увидим, что 6 точек из 12, полученных при помощи $L^6 P$, совпадут с точками, выведенными при помощи L_6^3.

Заметим, что L_6^3 и $L^6 P$ могут существовать самостоятельно, представляя собою определенные виды симметрии.

Таким образом, понятие о подчиненности мы можем распространить и на различные виды симметрии. Подчиняющим видом симметрии мы будем называть такой, в котором содержатся все элементы симметрии подчиненного ему вида симметрии, причем аналогичные элементы симметрии подчиненного вида должны иметь в подчиняющем то же пространственное взаимоотношение, какое они имеют в подчиненном виде симметрии.

Рассматривая с этой точки зрения виды симметрии различных симметрических систем, мы увидим, что все они подчинены симметрии шара. Кроме того, приняв во внимание самый способ вывода одних видов симметрии из других путем прибавления к исходным осям симметрии различных элементов симметрии, мы можем заключить, что все виды симметрии данной симметрической системы подчинены определенным видам симметрии той же системы, а также и некоторым видам симметрии других систем.

Для примера определим, какие виды симметрии подчинены виду симметрии: $3\ L^4\ 4\ L_6^3\ 6\ L^2\ 9\ Pc$. Совершенно ясно, что этому виду симметрии подчинены все виды симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы, кроме того, все виды симметрии моногональной, дигональной и тригональной систем, а также 5 видов симметрии тетрагональной симметрической системы, не содержащих L_8^4. Виду симметрии $L^6\,6\,L^2\,7\,Pc$ подчинены все виды симметрии моногональной, дигональной и тригональной симметрических систем и, кроме того, 5 видов симметрии гексагональной симметрической системы, не содержащих L_{12}^6.

21. ПРОСТЫЕ ФОРМЫ.

Простой формой называется такая геометрическая пространственная фигура, состоящая из плоских граней, в ко-

торой все грани связаны друг с другом некоторыми элементами симметрии. Таким образом, грани простой формы могут быть выведены из данной совокупности элементов симметрии и одной плоскости, определенного положения по отношению к данным элементам симметрии. Из этого мы можем вывести заключение, что если нам дана возможная совокупность элементов симметрии, т. е. если мы имеем, как данное, некоторый вид симметрии, то мы всегда можем, взяв некоторую плоскость в пространстве, получить определенную простую форму.

Если плоскость, взятая для образования простой формы, расположена косо по отношению ко всем элементам симметрии, и не пересекает неравных осей симметрии на равных расстояниях от центра, то выведенная из нее пространственная фигура получает название простой общей формы для данного вида симметрии.

Если же взята для образования простой формы плоскость, параллельная или перпендикулярная к некоторым элементам симметрии, или, наконец, пересекающая неравные оси симметрии на одинаковых расстояниях от центра, то полученная фигура представляет собою частный случай простой формы.

Для получения простой формы, при помощи элементов симметри данного вида и одной данной плоскости, необходимо подвергнуть эту плоскость тем симметрическим преобразованиям, которые обуславливаются данными элементами симметрии.

Простые формы могут представлять собою как замкнутые пространственные фигуры — некоторые многогранники, так и незамкнутые фигуры, образованные плоскостями, неограниченно продолжающимися в одном или нескольких направлениях.

Рассмотрим теперь простые формы, которые мы можем вывести для разных видов симметрии различных симметрических систем, причем для образования простой формы возьмем плоскость, не проходящую через центр симметрии данного вида и не совпадающую с осью или плоскостью симметрии, имеющихся в рассматриваемом виде симметрии.

22. ПРОСТЫЕ ФОРМЫ В n-ГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ.

Прежде всего рассмотрим простые формы для общего случая симметрических систем первой группы, а именно для n-гональной симметрической системы при $\infty > n > 2$.

Если у нас имеется в виде симметрии всего только одна ось симметрии наименования n, то из косой плоскости, вращением вокруг оси L^n, мы выведем еще $(n - 1)$ плоскостей, а вместе с данной получим всего n плоскостей, пересекающихся в одной точке, находящейся на оси симметрии L^n. В этом случае получается незамкнутая простая форма, представляющая собою многогранный угол с n равными плоскими углами и осью симметрии, проходящей в вершине этого угла. Такая простая форма называется вообще пирамидой (от греч. πυραμίς) и следовательно простой общей формой для вида симметрии L^n мы будем иметь n-гональную пирамиду. Слово n-гональный образуется от греческого слова гонос (γῶνος) угол: для обозначения числа n употребляются также греческие числительные: моно — (μόνο-) один, ди (δί-) — два, три (τρί-) — три, тетра — (έτρα) четыре, пента — (πέντα) пять, гекса — (ἕξα) шесть и т. д. Таким образом, например, (рис. 36*a*) гексагональной пирамидой мы будем называть такую простую форму, которая состоит из 6 плоскостей, пересекающихся в одной точке, находящейся на оси симметрии.

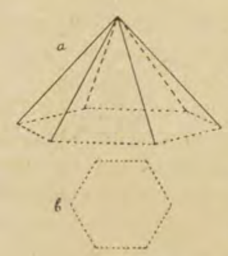


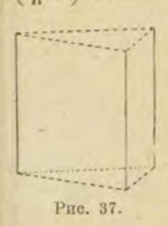
Рис. 36.

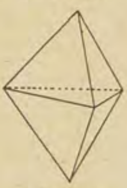
Если мы пересечем n-гональную пирамиду плоскостью, перпендикулярною к оси L^n, то в сечении получится правильный n-угольник, напр. в случае гексагональной пирамиды получим шестиугольник — гексагон (рис. 36*b*).

Кроме простой общей формы, мы можем получить для вида симметрии L^n еще две частных простых формы, а именно 1) n-гональную призму, если возьмем плоскость, параллельную L^n и 2) гемипинакоид, взяв плоскость, перпендикулярную к данной оси L^n. Обе эти простые формы — незамкнутые.

Призмой (πρίσμα) называется простая форма, состоящая из граней, пересекающихся в параллельных ребрах. В зависимости от многоугольника, получающегося в сечении призмы плоскостью, перпендикулярной к оси призмы, мы можем иметь различные призмы, совершенно аналогично тому, как мы это видели для пирамид. На рис. 37 изображена для примера тригональная призма.

Название гемипинакоид также происходит от греческих слов: (ἡμί-) геми — половина и (πιναχοειδής) пинакоид — имеющий вид доски, т. е. простая форма, состоящая только из одной плоскости, а пинакоид — состоящая из двух параллельных плоскостей.


Рис. 37.


Рис. 38.

Для вида симметрии, выражающегося формулой $L^n P$ мы получаем в качестве простой общей формы n-гональную дипирамиду, т. е. такую фигуру, которую можно рассматривать, как совокупность двух равных пирамид, причем вершины этих пирамид обращены в прямо противоположные стороны, а грани одной пирамиды являются зеркальными изображениями граней другой. Таким образом n-гональная дипирамида представляет собою замкнутую пространственную фигуру — многогранник, каждая грань которого — равнобедренный треугольник, причем все грани равны друг другу. На рисунке 38 изображена тригональная дипирамида.

Многогранник по гречески носит название полиэдра (πολύεδρος), т. е. тела, обладающего многими (πολύ) гранями (ἕδρα). Полиэдр, грани которого равны друг другу, называется изоэдром, т. е. равногранником от греческих слов (ἴσος) изос — равный и (ἕδρα) эдра — грань.

Кроме простой общей формы, для вида симметрии $L^n P$ мы имеем еще два частных случая простых форм, а именно: 1) пинакоид — если взята грань перпендикулярная к оси L^n и, следовательно, параллельная плоскости симметрии и 2) n-гональная призма, если взять для образования простой формы грань, параллельную L^n и перпендикулярную P.

Для вида симметрии $L^n nP$ мы, в качестве простой общей формы, получаем ди-n-гональную пирамиду. Эта пирамида дает в сечении с плоскостью, перпендикулярной к оси L^n, многоугольник, носящий название ди-n-гона. Такой многоугольник имеет все стороны равными между собой, а углы равные через один. Простейшим случаем ди-n-гона, при $n = 2$ будет ромб. На рисунке 39 *a* изображена дитригональная пирамида, а на этом же рисунке *b* дитригон. Для построения ди-n-гона можно применить такой способ: берем правильный n-угольник, или n-гон, и вписываем его в окружность. Проводим из центра n-гона радиусы, перпендикулярные к его сторонам. Отложив на каждом таком радиусе некоторый отрезок, больший расстояния стороны от центра и меньший, чем длина радиуса, получаем n точек. Соединив эти точки с вершинами n-угольника получим ди-n-гон. Для примера на рис. 40 изображены: a) ромб, b) тригон и построение дитригона, c) дитригон, d) дитетрагон.

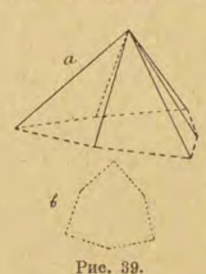


Рис. 39.

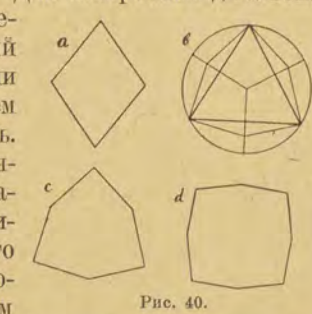


Рис. 40.

Если мы возьмем для образования простой формы грань, перпендикулярную L^n, то получим гемипинакоид. Если взять грань, параллельную L^n и не перпендикулярную к P, то получается ди-n-гональная призма. Грань, перпендикулярная к P и не параллельная L^n, даст n-гональную пирамиду и, наконец, грань, параллельная L^n и перпендикулярная P, образует n-гональную призму. Таким образом, для этого вида симметрии мы получаем следующие простые формы:

1) ди-n-гональная пирамида — простая общая форма,
2) гемипинакоид,
3) ди-n-гональная призма,
4) n-гональная пирамида,
5) n-гональная призма.

Из таких форм на рисунке 41 изображена дитригональная призма.

Для вида симметрии $L^n n L^2$ простой общей формой будет служить замкнутая пространственная фигура — ди-n-гональный трапецоэдр. На рис. 42 a изображен дитригональный трапецоэдр. Каждая грань этой формы будет трапеца (τραπέζιον) (рис. 42 b), т. е. четыреугольник с двумя неравными и двумя равными друг другу сторонами. Одна из диагоналей такого четыреугольника делит его на два неравных друг другу треугольника, из которых один будет равнобедренным, а другой с тремя неравными друг другу сторонами.

Рис. 41.

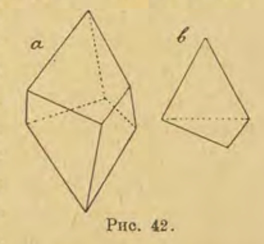


Рис. 42.

Частные случаи простых форм для этого вида симметрии будут:

1) пинакоид, если грань перпендикулярна L^n;

2) ди-n-гональная призма, если грань $\parallel L^n$ и не $\perp L^2$;

3) n-гональная призма, если грань $\parallel L^n$ и $\perp L^2$.

Для вида симметрии $L^n n L^2 (n+1) P$ получаем в качестве простой общей формы ди-n-гональую дипирамиду. На рис. 43 изображена дитригональная дипирамида. Частные формы будут:

1) пинакоид, если грань $\perp L^n$;

2) ди-n-гональная призма, если грань $\parallel L^n$ и не перпендикулярна к P или L^2;

3) n-гональная призма, если грань $\perp L^2$;

4) n-гональная дипирамида, если грань перпендикулярна к P, проходящей через ось L^2, но не перпендикулярна к L^2.

Рис. 43.

Для вида симметрии L^n_{2n} простой общей формой будет служить 2 n-гональный дидельтоэдр, как например, изображенный на рис. 44 a дитетрагональный дидельтоэдр. Эта зам-

кнутая простая форма — изоэдр, грани которого дидельты. Дидельтой (*διδέλτα*, рис. 44*b*) называется четыреугольник, у которого каждая сторона имеет себе равную и пересекающуюся с ней сторону. Таким образом, дидельту можно разделить одной из диагоналей, изображенной на рис. 44*b* пунктиром, на два неравных между собой равнобедренных треугольника. Другая диагональ дидельты делит ее на два равных друг другу, но в общем случае, уже неравносторонних треугольника. В частном случае, если $n = 3$, мы получаем дидельту с равными друг другу сторонами, т. е. ромб и, благодаря этому, гексагональный дидельтоэдр получает название ромбоэдра (рис. 45.)

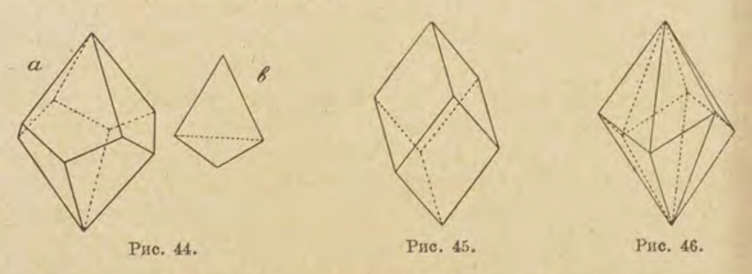


Рис. 44. Рис. 45. Рис. 46.

Кроме простой общей формы для этого вида симметрии мы имеем еще:

1) пинакоид, если грань $\perp L_{2n}^{n}$;

2) 2-*n* гональную призму, в случае если грань $\parallel L_{2n}^{n}$.

Для вида симметрии $L_{2n}^{n} nPnL^{2}$ простой общей формой будет служить ди-2*n*-гональный скаленоэдр — изоэдр, каждая грань которого — скалена (от греч. *σκαληνός* — косой) — в общем случае косоугольный треугольник. На рис. 46 изображен дигексагональный скаленоэдр. Частные простые формы будут:

1) пинакоид, если грань $\perp L_{2n}^{n}$;

2) ди-2*n*-гональная призма, если грань $\parallel L_{2n}^{n}$, но не перпендикулярна ни к L^{2} ни к P;

3) 2*n*-гональная призма, если грань $\parallel L_{2n}^{n}$ и перпендикулярна к L^{2} или к P;

4) $2n$-гональная пирамида, если грань не параллельна L_{2n}^{n}, но $\perp P$, или образует равные углы с двумя ближайшими плоскостями симметрии.

Перечисленные выше простые формы получаются с одинаковыми основными наименованиями, если $n > 2$. Каждый вид симметрии мы вообще будем называть соответственно названию простой общей формы, характеризующей данный вид симметрии.

Простые формы n-гональной симметрической системы, получающиеся в зависимости от положения исходной грани, взятой для образования формы, сведены в таблице № 1.

Для соответственных видов симметрии всех n-гональных симметрических систем мы получим названия, отличающиеся одно от другого только числительным, определяющим n для данной системы. В случае, если n равно 1 или 2 мы получаем соответственно две системы: 1) при $n = 1$ — моногональную симметрическую систему и 2) при $n = 2$ — дигональную симметрическую систему. Для видов симметрии этих двух систем мы будем иметь некоторые простые общие формы совершенно другого вида и названия, сравнительно с формами n-гональной симметрической системы при $n > 2$. Кроме того, самое количество видов симметрии в моногональной симметрической системе уже не 7, а только 3. Перейдем теперь к рассмотрению видов симметрии и простых форм моногональной симметрической системы.

23. МОНОГОНАЛЬНАЯ СИММЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА.

Для получения видов симметрии моногональной симметрической системы мы вводим то особое условие, что высшее наименование оси симметрии должно быть единица. Введя такое условие, мы, из 7 видов симметрии n-гональной симметрической системы, должны прежде всего совершенно отбросить те 3 вида симметрии, в которых имеются двойные оси симметрии. Кроме того, два из оставшихся четырех видов симметрии, а именно оба вида симметрии, в которых имеются плоскости симметрии, становятся тождественными и, таким образом, получается всего три вида симметрии, образующие данную систему, а именно:

n-гональная симметрическая система. Общая характеристика: одна L^n, где $n > 2$.							
Элементы вида симметрии	L^n	$L^n P$	$L^n n P_1$	$L^n n L^2$	$L^n n L^2 P n P_1$	L^n_{2n}	$L^n_{2n} n L^2 n P_1$
Расположение граней относительно элементов симметрии в простых формах	Простые общие формы						
	n-гональная пирамида	n-гональная дипирамида	ди-n-гональная пирамида	ди-n-гональный трапецоэдр	ди-n-гональная дипирамида	$2n$-гональный дидельтоэдр	ди-$2n$-гональный скаленоэдр
$\perp L^n$	Геминпинакоид	Пинакоид	Геминпинакоид	Пинакоид			
$\parallel L^n$	n-гональная призма		Ди-n-гональная призма			$2n$-гональная призма	ди-$2n$-гональная призма
$\parallel L^n$ и $\perp P_1$			n-гональная призма		n-гональная призма		$2n$-гональная призма
$\parallel L^n$ и $\perp L^2$				n-гональная призма			$2n$-гональная призма
$\perp P_1$ или $\perp$ плоскости, проходящей через L^n и L^2			n-гональная пирамида		n-гональная дипирамида		$2n$-гональный дидельтоэдр

Примечание: P - плоскость симметрии, перпендикулярная к L^n
P_1 - „ „ проходящая через L^n

1) — отсутствие элементов симметрии, так как ось симметрии наименования единица равнозначна отсутствию всякой симметрической операции. В самом деле, ясно, что поворот какой угодно фигуры на 360^0 вокруг какой угодно прямой приведет данную фигуру в первоначальное положение, так что отсутствие всякой симметрии может быть представлено в виде символа ∞L^1;

2) P — одна единственная плоскость симметрии;

3) c — центр обратного равенства или ∞L_2^1.

Ясно, что простой общей формой для первого случая, характеризующегося отсутствием элементов симметрии, и притом вообще единственной возможной простой формой, будет служить гемипинакоид, так как каждая грань любого положения не будет повторяться в виду отсутствия элементов симметрии.

Для вида симметрии P, грань, расположенная косо по отношению к плоскости симметрии, отразившись в этой последней, даст еще вторую грань, пересекающуюся с данной по прямой линии, лежащей в плоскости симметрии. Таким образом, для этого вида симметрии мы получаем простую общую форму, состоящую из двух пересекающихся между собой граней и называемую гемипризмой, т. е. полупризмой, в виду того, что эта форма представляет собою половину ромбической призмы. Так как в этом виде симметрии совершенно не имеется оси симметрии, то и простая общая форма, для этого вида, получает название гемипризмы без оси (рис. 47).

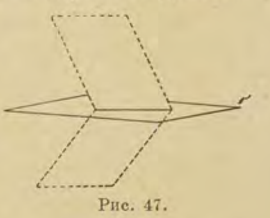


Рис. 47.

Взяв грань, параллельную P, мы получим, в качестве простой формы, пинакоид, а грань, перпендикулярная P, даст гемипинакоид. Таким образом, для этого вида симметрии мы имеем 3 простые формы:

1) гемипризма без оси (простая общая форма);

2) пинакоид, если грань $\parallel P$;

3) гемипинакоид, если грань $\perp P$.

Для вида симметрии, характеризующегося центром обратного равенства c, мы получаем одну единственную форму, а именно пинакоид.

24. ДИГОНАЛЬНАЯ СИММЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА.

Дигональная симметрическая система, как и всякая n-гональная система, имеет 7 видов симметрии. Рассмотрим теперь простые формы для этих видов симметрии:

1) для вида симметрии L^2 мы получаем в качестве простой общей формы гемипризму, причем эта гемипризма, обладая L^2, получает название гемипризмы с осью (рис. 48). Кроме того, мы имеем еще две простые формы:

1) гемипинакоид, если грань $\perp L^2$;

2) пинакоид, если грань $\parallel L^2$.

Для вида симметрии L^2Pc мы имеем в качестве простой общей формы ромбическую призму (рис. 49), так как каждая косая по отношению к L^2 и P грань, после вращения вокруг L^2, даст новую грань, которая вместе с исходной даст пару граней. Эта пара граней, отразившись в плоскости симметрии, перпендикулярной к L^2, даст еще пару граней, причем все четыре грани простой формы будут пересекаться между собой в параллельных ребрах. Сечение этой формы плоскостью, перпендикулярной к ребру пересечения ее граней образует в общем случае ромб. В частном случае, если отрезок, образуемый взятой гранью по L^2, равен отрезку перпендикуляра, опущенного из центра симметрии на ребро этой формы, мы получаем ромбическую призму с квадратным сечением. Кроме простой общей формы, мы имеем еще только одну, возможную для этого вида симметрии, простую форму, а именно пинакоид. Пинакоид выводится всякий раз, когда взятая для образования простой формы грань будет перпендикулярна или параллельна L^2.

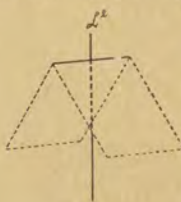


Рис. 48.

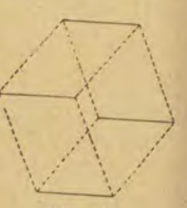


Рис. 49.

Для вида симметрии $L^2\,2\,P$ простой общей формой служит ромбическая пирамида (рис. 50). Кроме этой формы, мы можем вывести еще следующие простые формы:

1) грань $\perp L^2$ — гемипинакоид;

2) грань $\perp P$ и $\parallel L^2$ — пинакоид;

3) грань $\perp P$, но не параллельна L^2 — гемипризма;

4) грань $\parallel L^2$, но не перпендикулярна P — ромбическая призма.

Для вида симметрии $3\,L^2$ простой общей формой служит ромбический сфеноид (рис. 51). Сфеноидами мы называем (от греч. *σφήν* — клин и *εἶδος* — вид) замкнутые простые формы, состоящие из четырех граней, т. е. четырехгранники, грани которых неправильные треугольники. Кроме простой общей формы мы имеем следующие частные случаи:

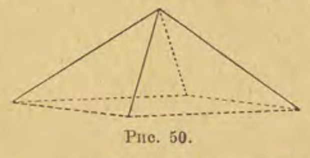


Рис. 50.



Рис. 51.

1) грань $\perp L^2$ — пинакоид;

2) грань $\parallel L^2$, но не перпендикулярна ни к одной из двух других L^2 — ромбическая призма.

Простая общая форма, для этого вида симметрии, получает название ромбического сфеноида благодаря тому, что сечения этой формы плоскостями, проходящими через две двойные оси будут ромбы.

Для вида симметрии $3\,L^2\,3\,Pc$ в качестве простой общей формы мы получаем ромбическую дипирамиду (рис. 52). Кроме того, мы будем иметь:

1) грань $\perp L^2$ — пинакоид;

2) грань $\perp P$ или $\parallel P$, но не перпендикулярна ни к одной из L^2 — ромбическая призма.

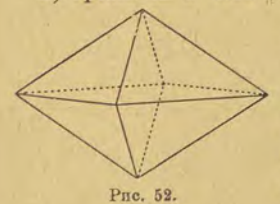


Рис. 52.

Для вида симметрии L^2_4, в качестве простой общей формы имеем тетрагональный сфеноид (рис. 53), грани

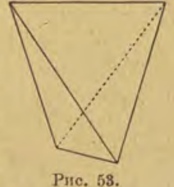


Рис. 53.

которого — равнобедренные треугольники, а плоскость, проведенная через центр симметрии фигуры, $\perp L_4^2$, дает в сечении с поверхностью фигуры тетрагон, или квадрат. Кроме простой общей формы мы имеем следующие частные случаи:

1) грань $\perp L_4^2$ — пинакоид;
2) грань $\parallel L_4^2$ — тетрагональная призма.

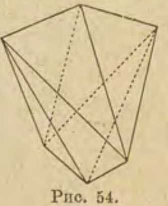


Рис. 54.

Для вида симметрии $L_4^2\,2L^2\,2P$ в качестве простой общей формы имеем дитетрагональный скаленоэдр (рис. 54). Сечение, проведенное через центр симметрии фигуры $\perp L_4^2$, будет дитетрагон.

Кроме того, для этого вида симметрии мы имеем следующие простые формы:

1) грань $\perp L_4^2$ — пинакоид;
2) грань $\perp L^2$ — тетрагональная призма;
3) грань $\perp P$ и $\parallel L_4^2$ — тетрагональная призма;
4) грань $\perp P$, но не $\parallel L_4^2$ — тетрагональный сфеноид;
5) грань $\parallel L_4^2$, но не не $\perp P$ — дитетрагональная призма.

Простые формы моногональной и дигональной симметрических систем для удобства общей ориентировки сведены в прилагаемой таблице № 2.

25. ПРОСТЫЕ ФОРМЫ В СИММЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ТРОЙНЫМИ ОСЯМИ СИММЕТРИИ.

Простые формы этих систем будут исключительно замкнутыми простыми формами, т. е. каждая простая форма будет некоторым многогранником. Каждый вид симметрии обоих рассматриваемых симметрических систем содержит несколько равных осей симметрии наименования выше чем 2. Если мы возьмем грань, перпендикулярную к одной из таких осей симметрии, то вообще мы выведем некоторый правильный многогранник. Каждый правильный многогранник мы будем называть, просто указывая число его граней. Таким образом:

Дигональная симметрическая система. Общая характеристика: высшее наименование постоянной оси симметрии 2.							
Элементы вида симметрии	L^2	L^2PC	$L^2 2P$	$3L^2$	$3L^2 3PC$	$L_4{}^2$	$L_4{}^2 2L^2 2P$
Расположение граней относительно элементов симметрии	Простые общие формы						
	Гемипризма с осью	Ромбическая призма	Ромбическая пирамида	Ромбический сфеноид	Ромбическая дипирамида	Тетрагональный сфеноид	Дитетрагональный скаленоэдр
$\perp L^2$	Гемипинакоид	Пинакоид	Гемипинакоид	Пинакоид			Тетрагональная призма
$\parallel L^2$	Пинакоид		Ромбическая призма				Тетрагональная дипирамида
$\perp P$		Пинакоид			Ромбическая призма		Тетрагональный сфеноид
$\perp L_4{}^2$						Пинакоид	
$\parallel L_4{}^2$						Тетрагональная призма	Дитетрагональная призма
Моногональная симметрическая система. Высшее наименование оси симметрии 1.				$(\infty L')$	$(\infty L'_2) = C$	P	P
				Гемипинакоид	Пинакоид	Общая форма Гемипризма без оси	$\perp P$ Гемипинакоид $\parallel P$ Пинакоид

1) Додекаэдр — двенадцатигранник — простая форма, грани которой перпендикулярны к L^5 в обоих видах симметрии икосаэдрической симметрической системы. Каждая грань додекаэдра правильный пятиугольник (рис. 55).

2) Гексаэдр — шестигранник — куб — правильный многогранник, грани которого перпендикулярны к L^4 или L^2 в тех видах симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы, в которых отсутствует L^4. Каждая грань гексаэдра — квадрат (рис. 56).

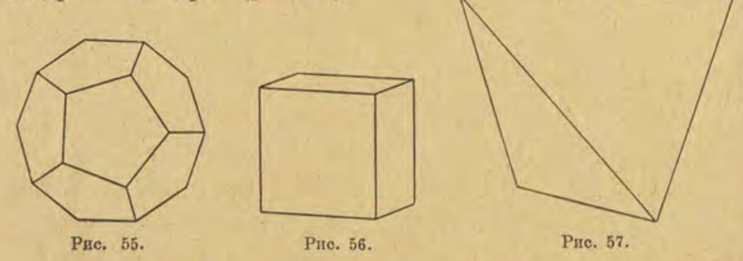


Рис. 55. Рис. 56. Рис. 57.

3) Тетраэдр — правильный четырехгранник, который получится, если мы возьмем плоскость, перпендикулярную L^3 в дитритетраэдрическом и пентагонально-тритетраэдрическом виде симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы (рис. 57).

4) Октаэдр — правильный восьмигранник, получающийся в дитриоктаэдрическом, дидодекаэдрическом и пентагонально-триоктаэдрическом видах симметрии в том случае, если для образования простой формы взята грань перпендикулярно L^3 (рис. 58).

5) Икосаэдр — правильный двадцатигранник, грани которого перпендикулярны L^3 в обоих видах симметрии икосаэдрической симметрической системы (рис. 59).

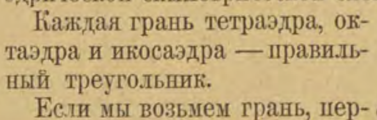


Рис. 58.

Каждая грань тетраэдра, октаэдра и икосаэдра — правильный треугольник.

Если мы возьмем грань, перпендикулярную к двойной оси симметрии в одном из двух видов симметрии икосаэдри-



Рис. 59.

ческой симметрической системы, то мы получим изоэдр, имеющий 30 граней, причем каждая грань будет представлять собою ромб. В виду этого, такой многогранник мы можем назвать ромбическим триаконтаэдром (тридцатигранником) (рис. 60).

Если мы возьмем плоскость, перпендикулярную к L^2 в дитриоктаэдрическом или пентагонально-тритетраэдрическом виде


Рис. 60.


Рис. 61.


Рис. 62.

симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы, то получим двенадцатигранный изоэдр, каждая грань которого — ромб. Этот изоэдр носит название ромбического додекаэдра (рис. 61).

Названия тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр и триаконтаэдр мы будем считать основными, для образования названий всех других простых форм, относящихся к видам симметрии систем правильных многогранников. Прилагательное, прибавленное к названию этих основных многогранников, укажет нам вид грани или способ получения определенного многогранника из основного. Числительное, прибавленное к одному из таких основных названий, покажет во сколько раз нужно увеличить число граней многогранника для вывода данной простой формы. Приведем несколько примеров.

1) Пирамидальный гексаэдр (рис. 62) будет такой многогранник, который получится, если каждую грань гексаэдра заменить четырехгранной пирамидой с таким условием, чтобы ребра гексаэдра сохранились в неприкосновенности. Точно таким же способом образуются пирамидальные: тетраэдр (рис. 63), октаэдр (рис. 64) и додекаэдр (рис. 65). Из этого мы заключаем, что грани пирамидальных простых форм всегда равнобедренные треугольники.

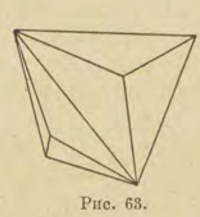

Рис. 63.


Рис. 64.


Рис. 65.

2) Пентагональный додекаэдр (рис. 66 *a*) — есть двенадцатигранник, у которого каждая грань — пятиугольник. Этот пятиугольник не правильный, так как в случае, если бы он был правильным, мы должны бы были назвать фигуру просто додекаэдром, без прибавления прилагательного и такая фигура была бы правильным многогранником.

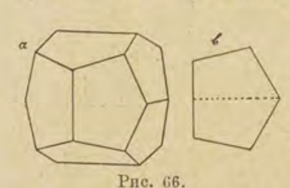


Рис. 66.


Рис. 67.

3) Триоктаэдр (рис. 67) представляет собою такую простую форму, которая имеет в три раза больше граней, чем октаэдр, т. е. 24 грани. Эта фигура может быть получена из октаэдра, если заменить каждую грань октаэдра тремя гранями, причем каждое ребро октаэдра заменится двумя ребрами выведенной простой формы. В этом случае мы получим изоэдр, каждая грань которого будет четырехугольником в виде дидельты.


Рис. 68.

4) Дитриоктаэдр (рис. 68) простая форма с 48 гранями, причем каждая грань некоторый косоугольный треугольник.

После таких предварительных замечаний, относительно номенклатуры простых форм икосаэдрической и тетраэдро-октаэдрической симметрических систем, перейдем к рассмотрению простых форм этих систем.

26. ПРОСТЫЕ ФОРМЫ ТЕТРАЭДРО-ОКТАЭДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Как уже было сказано выше, эта система характеризуется присутствием $4\,L^3$.

Для вида симметрии $3\,L^4\;4\,L^3_6\;6\,L^2\;9\,P$ мы имеем, в качестве простой общей формы, дитриоктаэдр. Кроме того, из грани специального положения выводятся следующие общие формы:

1) грань $\perp L^4$ — гексаэдр (куб);

2) грань $\perp L^3_6$ — октаэдр;

3) грань $\perp L^2$ — ромбический додекаэдр.

В этом виде симметрии мы имеем две различные группы плоскостей симметрии.

1) 3 плоскости, проходящие через четверные и двойные оси, но не проходящие через тройные оси симметрии. Если взять грань, перпендикулярную к такой плоскости симметрии, то получается простая форма — пирамидальный гексаэдр (рис. 62). Эту форму можно также рассматривать, как образовавшуюся из грани, параллельной одной из L^4, но не перпендикулярной ни к одной оси симметрии.

2) 6 плоскостей симметрии, проходящих через четверные, тройные и двойные оси симметрии. Грань, перпендикулярная к одной из таких плоскостей симметрии, может нам дать две простые формы, в зависимости от своего положения относительно ближайших друг к другу осей симметрии L^4, L^3 и L^2:

a) пирамидальный октаэдр, в том случае, если в простой форме, между двумя ближайшими L^4 и L^3 расположено ребро, соединяющее концы этих осей симметрии (рис. 64);

b) триоктаэдр, в том случае, если ребро соединяет концы ближайших друг к другу L^3 и L^2 (рис. 67).

Кроме перпендикулярности к плоскости симметрии, грани пирамидального октаэдра и триоктаэдра могут быть охарактеризованы тем, что каждая такая грань параллельна одной из имеющихся в этом виде двойных осей симметрии.

Для вида симметрии $3\,L^4\;4\,L^3\;6\,L^2$ простой общей формой будет служить пентагональный триоктаэдр (рис. 69 *a*). —

24-х — гранник, каждая грань которого представляет собою пятиугольник. Этот пятиугольник (рис. 96 *b*) состоит из четырех непараллельных сторон, попарно равных между собой, причем равны друг другу взаимно пересекающиеся стороны. Одна из сторон такой пары пересекается с стороной другой пары в вершине, а другие стороны двух пар разделены стороной, не имеющей себе равной.

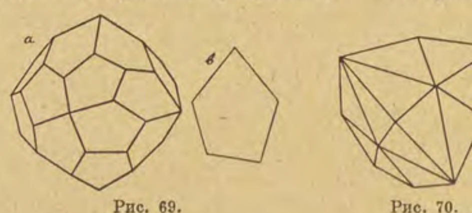




Рис. 69. Рис. 70. Рис. 71.

В виду отсутствия в этом виде симметрии плоскостей симметрии, мы можем всегда образовать два пентагональных триоктаэдра, являющиеся зеркальными изображениями один другого. Такие простые формы называются энантиоморфными. Все остальные случаи частных простых форм этого вида симметрии будут совершенно одинаковы с формами предыдущего вида симметрии.

Для вида симметрии $3\,L_4^2\;4\,L^3\;6\,P$ в качестве простой общей формы мы будем иметь дитритетраэдр (рис. 70), 24-х гранный изоэдр, все грани которого — косоугольные треугольники. Кроме простой общей формы мы будем иметь:

1) гексаэдр, если грань $\perp L_4^2$;

2) тетраэдр, если грань $\perp L^3$;

3) ромбический додекаэдр, если грань $\perp P$ и $\parallel L_4^2$.

Кроме того, мы можем получить две простые формы, взяв грань, перпендикулярную плоскости симметрии, но не параллельную L_4^2:

a) пирамидальный тетраэдр, короткие ребра которого будут соединять ближайшие друг другу концы тройных осей, причем будут сохраняться и ребра тетраэдра (рис. 63);

b) тритетраэдр, грани которого — дидельты, а каждое ребро соединяет ближайшие концы двойной и тройной оси симметрии (рис. 71).

Если мы возьмем грань $\parallel L_4^2$, но не перпендикулярную P, то выведем в качестве простой формы пирамидальный гексаэдр.

Этим исчерпывается всевозможные простые формы для рассматриваемого вида симметрии. Для вида симметрии $3\,L^2\,4\,L_6^3\,3\,P$ находим в качестве простой общей формы дидодекаэдр (рис. 72) — 24-х гранный изоэдр, грани которого особого вида трапецы.

Рис. 72.

Кроме простой общей формы мы имеем следующие частные случаи:

1) гексаэдр, если грань $\perp L^2$;

2) октаэдр, если грань $\perp L^3$;

3) пирамидальный октаэдр и триоктаэдр, если грань перпендикулярна плоскости, проведенной через две L^3 и не $\parallel L^2$;

4) ромбический додекаэдр, если грань параллельна плоскости, проведенной через $2\,L^3$ (в этом случае грань $\parallel L^2$, лежащей в той же плоскости);

5) пентагональный додекаэдр, если грань $\perp P$ и $\parallel L^2$, но не перпендикулярна к плоскости, проведенной через $2\,L^3$ (рис. 66 а).

Каждая грань пентагонального додекаэдра представляет собою пятиугольник с 4-мя равными и одной неравной сторонами. 2 угла при неравной стороне равны друг другу; кроме того имеются еще два равных угла. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла, противолежащего неравной стороне, на эту сторону, делит этот пятиугольник на две симметричные трапецы (рис. 66 b).



Рис. 73.

Для вида симметрии $3\,L^2\,4\,L^3$, в качестве простой общей формы, получаем пентагональный тритетраэдр (рис. 73), грани которого пятиугольники с такой же характеристикой, как и грани пентагонального триоктаэдра. Кроме того, имеются следующие простые формы:

1) гексаэдр, если грань $\perp L^2$;

2) тетраэдр, если грань $\perp L^3$;

3) пирамидальный тетраэдр и тритетраэдр, если грань перпендикулярна плоскости, проведенной через $2\,L^3$;

4) ромбический додекаэдр, если грань параллельна L^2 и плоскости, проведенной через $2\,L^3$;

5) пентагональный додекаэдр, если грань параллельна L^2 и не перпендикулярна к плоскости, проходящей через $2\,L^3$.

27. ПРОСТЫЕ ФОРМЫ ИКОСАЭДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

В обоих видах симметрии этой системы мы имеем одинаковое количество одинаково расположенных осей симметрии. В виду этого, простые формы, выводящиеся из грани, перпендикулярной к одной из осей симметрии, будут совершенно одинаковы для обоих видов симметрии. Точно так же для обоих видов симметрии будут одинаковы и простые формы, выводящиеся из граней, параллельных L^2, а именно три различных шестидесятигранных изоэдра. Единственным различием для этих двух видов симметрии будут служить простые общие формы.

Для вида симметрии $6\,L^5\,10\,L^3\,15\,L^2$, простой общей формой будет пентагональный трииксаэдр (рис. 74), 60-ти гранный изоэдр, грани которого — пятиугольники с такой же характеристикой, как и грани пентагонального триоктаэдра.

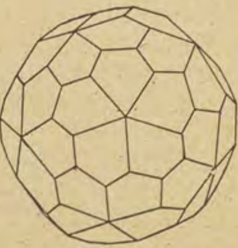


Рис. 74.

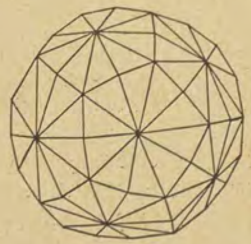


Рис. 75.

Простой общей формой для вида симметрии $6\,L^5_{10}\,10\,L^3_6$ $15\,L^2\,15\,P$ будет служить дитриикосаэдр (рис. 75), 120-ти-гранный изоэдр, каждая грань которого косоугольный треугольник. Другие простые формы, общие для обоих видов симметрии — следующие:

Додекаэдр, если грань $\perp L^5$.

Икосаэдр, если грань $\perp L^3$.

Ромбический триаконтаэдр, если грань $\perp L^2$.

Пирамидальный додекаэдр, если грань $\parallel L^2$ и короткие ребра треугольных граней соединяют ближайшие концы тройной и пятерной оси симметрии, причем сохраняются ребра додекаэдра (рис. 65).

Пирамидальный икосаэдр (рис. 76), если грань $\parallel L^2$ и короткие ребра формы соединяют ближайшие концы L^5 и L^3. В этом случае сохраняются ребра икосаэдра.



Рис. 76.

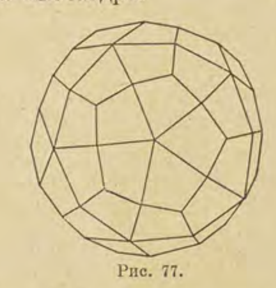


Рис. 77.

Трикосаэдр (рис. 77), если грань $\parallel L^2$ и ребра простой формы могут быть разделены на 2 группы. Каждое ребро первой группы соединяет ближайшие концы двойной и тройной оси, а каждое ребро второй группы соединяет ближайшие концы L^5 и L^2. В этом случае каждая грань представляет собою дидельту.

Простые формы тетраэдро-октаэдрической и икосаэдрической симметрических систем в общей сводке представлены на таблице № 3 и 4.

28. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ.

В предыдущем изложении за основу для вывода различных простых форм мы приняли определенную комбинацию элементов симметрии, характеризующую данный вид симметрии. При такой постановке вопроса мы видели, что одна и та же простая форма может быть выведена для различных видов симметрии, и только одни общие простые формы вполне ха-

Тетраэдро-октаэдрическая симметрическая система
Общая характеристика системы $4L^3$

Эл менты вида симметрии	$3L^2 4L^3$	$3L^2 4L^3_6 3P$	$3L^2_4 4L^3 6P$	$3L^4 4L^3 6L^2$	$3L^4 4L^3_6 6L^2 9P$
Расположение граней форм относительно элементов симметрии	Простые общие формы				
	Пентагональный тритетраэдр	Дидодекаэдр	Дитритетраэдр	Пентагональный триоктаэдр	Дитриоктаэдр
$\perp L^3$	Тетраэдр	Октаэдр	Тетраэдр	Октаэдр	
$\perp L^2$	Гексаэдр			Ромбический додекаэдр	
$\parallel L^2$	Пентагональный додекаэдр		Пирамидальный гексаэдр	Пирамидальный октаэдр, если $q > n\sqrt{3}$	
	Ромбический додекаэдр, если отрезки по $2L^2$ равны		Ромбический додекаэдр, если грань $\perp P$	Триоктаэдр, если $q > n\sqrt{3}$	
$\perp L^4$				Гексаэдр	
$\parallel L^4$				Пирамидальный гексаэдр	
$\perp$ плоскости, проходящей через $2L^3$	Тритетраэдр, если $m > n\sqrt{3}$	Пирамидальный октаэдр, если $m > n\sqrt{3}$	Тритетраэдр, если $m > n\sqrt{3}$		
	Пирамидальный тетраэдр, если $m < n\sqrt{3}$	Триоктаэдр, если $m < n\sqrt{3}$	Пирамидальный тетраэдр, если $m < n\sqrt{3}$		

Примечание: m - отрезок по оси L^2; n - отрезок по оси L^3; q - отрезок по оси L^4

Икосаэдрическая симметрическая система Общая характеристика $10L^3$		
Элементы видов симметрии	$6L^5\,10L^3\,15L^2$	$6L^5_{10}\,10L^3_6\,15L^2\,15P$
Простые общие формы		
Расположение граней относительно элементов симметрии	Пентагональный трикосаэдр	Дитрикосаэдр
$\perp L^3$	Икосаэдр	
$\perp L^2$	Ромбический триаконтаэдр	
$\parallel L^2$	Пирамидальный додекаэдр, если $p > m \cdot \cos 31^0 43' 07''$	
	Пирамидальный икосаэдр, если $n > m \cdot \cos 20^0 54' 21''$	
	Трикосаэдр, если $p > n \cdot \cos 37^0 22' 32''$	
$\perp L^5$	Додекаэдр	

Примечание: m - отрезок по L^2; n - „ „ L^3; p - „ „ L^5

рактеризуют данный вид симметрии. В виду этого, каждый вид симметрии мы называем по названию его простой общей формы. С другой стороны, если нам дана какая-нибудь простая форма, то мы всегда можем определить ее симметрию по внешнему виду этой формы, обращая внимание на вид граней и их взаимное расположение.

При таком определении, прежде всего необходимо решить вопрос, не будет ли одна грань данной формы совмещаться с другой гранью той же формы при помощи вращения вокруг некоторой оси, которая и будет осью симметрии. Количество граней, совмещающихся друг с другом при повороте вокруг такой оси на 360^0, даст наименование этой оси симметрии. Точно так же необходимо определить, не будет ли одна грань формы являться зеркальным изображением другой грани той же формы, причем такая связь между гранями будет осуществляться при помощи некоторой плоскости симметрии.

Найдя все элементы симметрии по внешнему виду данной формы, мы в результате получим некоторую совокупность элементов симметрии, чем и определится в свою очередь и самый вид симметрии фигуры.

Так как этот вид симметрии определен по внешнему виду фигуры, то мы его будем называть внешней симметрией данной фигуры, в отличие от ее внутренней симметрии, которую мы можем определить для геометрических фигур только в том случае, если нам предварительно даны все элементы симметрии данного вида, не выводящиеся друг из друга.

Таким образом, внешняя симметрия куба будет $4L_6^3\,3L^4\,6L^2\,9P$, а его внутренняя симметрия может быть такой же, как и его внешняя симметрия, но кроме того он может относиться и к каждому из остальных четырех видов симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы.

29. КОМБИНАЦИИ ПРОСТЫХ ФОРМ.

В предыдущем изложении было обращено внимание исключительно только на пространственные геометрические фигуры, представляющие собою простые формы, т. е. такие фигуры, которые получаются из одной грани, благодаря ее повторе-

нию вследствие присутствия определенной комбинации элементов симметрии.

Кроме таких простых форм, мы можем представить себе совокупность граней, образующих пространственную фигуру, причем все грани такой фигуры уже нельзя будет вывести из одной данной грани, какую бы комбинацию элементов симметрии мы ни взяли. Такие фигуры могут быть получены только путем повторения нескольких граней различного положения относительно данных элементов симметрии. В виду того, что каждое положение плоскости относительно элементов симметрии определяет некоторую простую форму, мы увидим, что фигура, выведенная из *n* плоскостей различного положения относительно данных элементов симметрии будет состоять из *n* простых форм, или будет представлять собою комбинацию *n* простых форм.

Мы видели, что простые формы могут быть замкнутыми, т. е. такими, которые представляют сами по себе некоторый определенный многогранник, как например, все простые формы симметрических систем, характеризующихся присутствием нескольких тройных осей симметрии; и незамкнутыми, как например, пинакоид, призмы, пирамиды и т. д. Ясно, что одна незамкнутая простая форма не может образовать многогранника и, каждый раз, когда такая форма появляется на многограннике — этот многогранник будет представлять собою комбинацию, по меньшей мере, двух простых форм. Конечно, возможны комбинации трех, четырех и т. д. простых форм. На рис. 78 изображена комбинация следующих простых форм: двух пинакоидов и двух ромбических призм. Эта комбинация относится к ромбопризматическому виду симметрии дигональной симметрической системы. На рис. 79 изображен многогран-

Рис. 78.

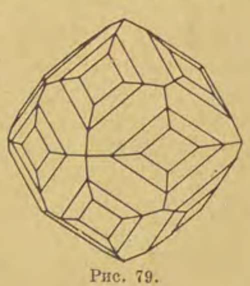


Рис. 79.

ник дитриоктаэдрического вида симметрии, представляющий собою комбинацию ромбического додекаэдра, триоктаэдра и дитриоктаэдра.

30. ВЕЛИЧИНА СИММЕТРИИ.

Мы видим, что из данной комбинации элементов симметрии и одной произвольно взятой плоскости, мы можем вывести некоторую простую форму. Для того, чтобы вывести простую общую форму для данного вида симметрии, необходимо взять плоскость, расположенную косо по отношению ко всем данным элементам симметрии. Количество граней в каждой простой общей форме находится в непосредственной зависимости от тех элементов симметрии, которые имеются в данном виде симметрии.

Если мы имеем некоторую ось симметрии L^n, то, благодаря присутствию этой оси, каждая данная грань, расположенная косо по отношению к L^n, повторится $n-1$ раз и общее число граней, в выведенной простой общей форме, будет $1+(n-1)=n$. Если нам дано N осей симметрии наименования n, т. е. NL^n, то количество граней, получающихся из одной, будет $1+N(n-1)$. Таким образом, если у нас имеется NL^n, PL^p, QL^q и т. д., то общее количество граней в простой общей форме будет:

$$S=1+N(n-1)+P(p-1)+Q(q-1)+\cdots$$

Если в данной комбинации элементов симметрии имеются плоскости симметрии, то общее количество граней в простой общей форме удвоится, так как из каждой грани получается две, благодаря отражению в плоскости симметрии. Если вид симметрии характеризуется присутствием только одной оси сложной симметрии определенного наименования и не содержит больше никаких элементов симметрии, то количество граней, в простой общей форме, будет равно наименованию этой оси, как оси сложной симметрии. Количество граней S, в простой общей форме, носит название величины симметрии данного вида симметрии.

31. ПОЯСА МНОГОГРАННИКОВ.

Рассматривая взаимное расположение граней симметрических многогранников, мы видим, что очень часто, в особенности если многогранник представляет собою комбинацию нескольких простых форм, некоторая часть граней многогранника пересекается между собой в параллельных ребрах. Совокупность граней, пересекающихся между собой в параллельных ребрах, вообще, называется зоной, или поясом граней. Направление, параллельное ребру пересечения граней пояса называется его осью. Пояса граней называются первичными в том случае, если все грани, данного пояса пересекаются в действительно имеющихся на многограннике ребрах. В виду этого, первичный пояс граней состоит из некоторого числа граней, следующих непрерывно одна за другой. На рис. 80 представлена комбинация куба и октаэдра, причем все ребра граней, входящих в состав одного из первичных поясов такого многогранника, изображены более толстыми линиями.

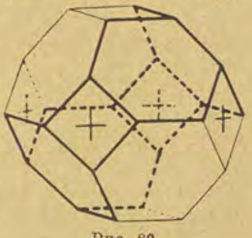


Рис. 80.

Кроме первичных, на многогранниках могут быть и вторичные пояса, т. е. также пояса, грани которых уже не все пересекаются друг с другом, благодаря разделению частей пояса гранями других поясов. Вообще говоря, грани вторичных поясов, только в том случае будут все пересекаться друг с другом в параллельных ребрах, если мы выбросим все другие грани многогранника и оставим только грани рассматриваемого, вторичного пояса. Каждая грань одного из таких вторичных поясов отмечена на рис. 80 крестиком.

Совокупность ребер многогранника, лежащих в одной плоскости называется ребровой зоной или поясом ребер. Ребровой пояс может быть также первичным, если все ребра данного пояса образуют на плоскости некоторый многоугольник. Вторичные пояса ребер не образуют замкнутой плоскостной фигуры, а представляют собою некоторую ломанную линию или несколько отдельных отрезков прямых.

32. ДЕФОРМАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ.

При выводе различных простых форм, возможных для данного вида симметрии, мы ввели определенное условие. Это условие заключалось в том, что плоскость, которую мы брали для образования определенной простой формы не должна была проходить через центр симметрии, а также не должна была совпадать с осью или с плоскостью симметрии. При соблюдении этих условий, мы получили в качестве простых форм некоторые пространственные фигуры, причем для целого ряда таких форм мы имели замкнутые поверхности — многогранники.

Если нам дан какой-нибудь вид симметрии, то мы можем образовать простую форму, если возьмем плоскость и не удовлетворяющую, только что упомянутыми условиями, так как в понятие простой формы эти условия совершенно не входят. Таким образом, мы имеем возможность получать простые формы, взяв для их образования плоскость, проходящую через центр симметрии, или, в случае отсутствия центра, совпадающую с осью или плоскостью симметрии. При таком образовании простой формы мы уже не получим многогранника и выведенная простая форма будет представлять собой, вообще, пучек плоскостей, пересекающихся в одной точке. Аналогичный пучек плоскостей мы получим, если перенесем все грани и ребра, данного симметрического многогранника параллельно самим себе до пересечения их в одной точке. При таком перенесении граней и ребер параллельно самим себе до пересечения их в одной точке, все элементы симметрии данного вида сохраняют свое значение и положение, а потому превращение симметрического многогранника в пучек граней и ребер, при помощи параллельного их перемещения, мы можем назвать деформацией без понижения симметричности.

Рассмотрим теперь такие деформации выпуклых многогранников с плоскими гранями, произведя которые, мы получим опять некоторый многогранник с тем же количеством плоских граней и ребер, какое было в измененном многограннике. Такие деформации называются гомогенными, при-

чем всякая совокупность прямых и плоскостей в пространстве, претерпевшая гомогенную деформацию, будет характеризоваться следующими признаками.

a) Все прямые линии, взятой совокупности, останутся прямыми и после гомогенной деформации. Прямые, равные и паралельные остаются такими же и после деформации.

b) Плоскость, подвергнутая гомогенной деформации остается плоскостью.

c) Два равных и паралельных плоских многоугольника, после гомогенной деформации остаются равными и паралельными друг другу.

Вообще, гомогенная деформация может быть определена как некоторое растяжение. Растяжением называется такое изменение данной фигуры, при котором только одна плоскость, называемая плоскостью растяжения, сохраняет свое первоначальное положение; все другие, паралельные ей плоскости перемещаются в некотором направлении, называемом направлением растяжения на величины, пропорциональные их расстояниям от плоскости растяжения. Путь, который проходит какая-нибудь точка плоскости, находящейся на расстоянии равном единице от плоскости растяжения будет прямой линией, паралельной направлению растяжения.

Мы можем различать разные виды растяжений, смотря по тому, какой угол образует направление растяжения с перпендикуляром к плоскости растяжения.

1) Если направление растяжения совпадает с перпендикуляром к плоскости растяжения, то мы имеем прямое растяжение. Величиной прямого растяжения мы называем отношение расстояний некоторой плоскости, паралельной плоскости растяжения до и после деформации. Если это отношение больше 1, то деформацию называют положительным, или собственно растяжением; если же это отношение меньше 1, то мы имеем отрицательное растяжение, или сжатие.

2) Если направление растяжения и перпендикуляр к плоскости растяжения образуют некоторый косой угол, то мы будем иметь косое растяжение.

3) В случае, если направление растяжения параллельно плоскости растяжения, мы будем иметь гомогенную деформацию, называемую сдвигом.

Таким образом, сдвигом фигуры называется такое ее изменение, при котором неподвижной остается только одна плоскость, называемая плоскостью сдвига. Все плоскости, параллельные плоскости сдвига, перемещаются в самих себе по некоторому направлению, называемому направлением сдвига, на величины, прямо пропорциональные их расстояниям от плоскости сдвига.

Величиной сдвига мы будем называть путь, пройденный во время деформации какой-нибудь точкой, находящейся от плоскости сдвига на расстоянии равном единице.

Из самого определения гомогенной деформации мы видим, что после растяжений и сдвигов количество граней многогранника, подвергнутого деформациям, не изменяется.

Если мы подвергнем прямому растяжению какой-нибудь симметрический многогранник, то все элементы симметрии этого многогранника, перпендикулярные плоскости растяжения, останутся без изменения. Все оси симметрии четного наименования, перпендикулярные направлению растяжения, останутся на своих местах и превратятся в двойные оси симметрии. Оси симметрии нечетного наименования исчезнут. Плоскость симметрии, перпендикулярная к направлению растяжения, сохранит свое значение плоскости симметрии и в деформированной фигуре. Все другие элементы симметрии, расположенные косо по отношению к плоскости и оси прямого растяжения, совершенно исчезнут.

В случае сдвига симметричной фигуры, сохраняются только два элемента симметрии: 1) плоскость симметрии, перпендикулярная плоскости сдвига и параллельная его направлению и 2) ось симметрии четного наименования, находящаяся в плоскости, перпендикулярной направлению сдвига и параллельная плоскости сдвига. Такая ось симметрии превращается после сдвига в L^2.

Таким образом, подвергая данную симметричную фигуру гомогенной деформации, мы, вообще говоря, можем понизить симметрию фигуры. Приняв во внимание такую возможность

понижения симметрии фигуры при помощи гомогенной деформации, мы можем рассматривать подчиненность одних видов симметрии другим с точки зрения возможности вывода одной симметричной фигуры из другой, обладающей более высокой симметрией, при помощи определенной деформации этой последней фигуры.

Рассмотрим, с этой точки зрения, вопрос о превращении правильного гексаэдра в некоторые параллелепипеды с меньшим количеством элементов симметрии. Как известно, внешняя симметрия гексаэдра будет $3L^4 4L_6^3 6L^2 9P$.

Если мы подвергнем гексаэдр прямому растяжению по одной из четверных осей симметрии, то, в результате, получим комбинацию тетрагональной призмы и пинакоида, которая по своей внешней симметрии будет относиться к дитетрагонально-дипирамидальному виду симметрии тетрагональной симметрической системы, т. е. будет иметь: $L^4 4L^2 5Pc$ (Рис. 81).

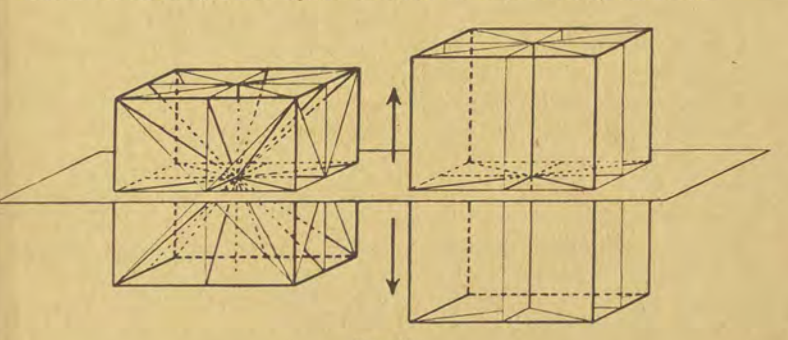


Рис. 81.

Если мы произведем прямое растяжение куба по одной из четырех L_6^3, то в результате получим ромбоэдр, который по внешней симметрии будет относиться к дигексагонально-скаленоэдрическому виду симметрии, т. е. будет иметь: $L_6^3 3L^2 3P$ (Рис. 82).

Если произвести прямое растяжение куба по одной из L^2, то получается комбинация ромбической призмы и пинакоида ромбо-дипирамидального вида, т. е. такая комбинация, которая по внешней симметрии будет иметь: $3L^2 3Pc$ (Рис. 83).

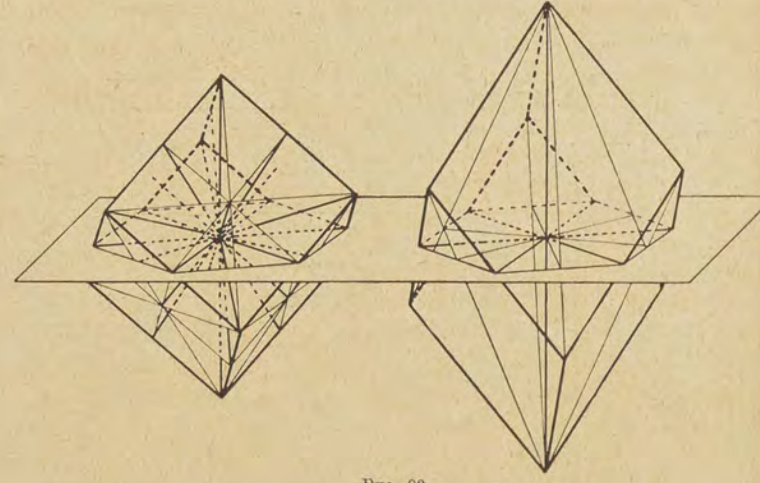


Рис. 82.

Подвергнув куб сдвигу, направление которого будет лежать в одной из плоскостей симметрии этой фигуры, причем эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости сдвига,

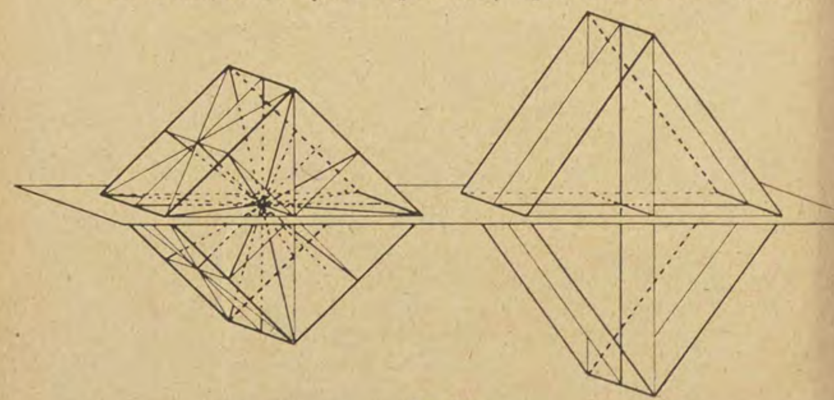


Рис. 83.

мы получим комбинацию из пинакоида и ромбической призмы ромбо-призматического вида дигональной системы,

т. е. комбинацию, характеризующуюся присутствием $L^2 Pc$ (рис. 84).

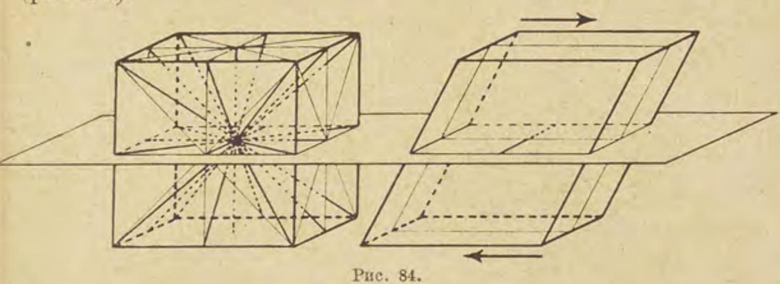


Рис. 84.

Приняв за плоскость сдвига некоторую плоскость, расположенную косо по отношению ко всем элементам симметрии куба, мы получим комбинацию из трех пинакоидов пинакоидального вида моногональной симметрической системы, характеризующуюся присутствием единственного элемента симметрии — центра обратного равенства.

Взяв комбинацию гексагональной призмы и пинакоида, имеющую внешнюю симметрию вида $L^6 6 L^2 7 Pc$, мы можем получить из нее, при помощи прямого растяжения по одной из L^2, комбинацию двух пинакоидов и ромбической призмы вида $3 L^2 3 Pc$ по своей внешней симметрии. (рис. 85).

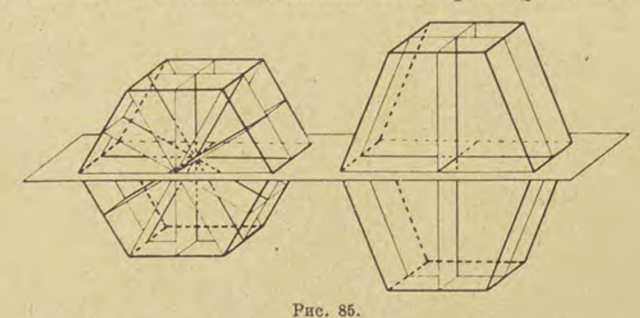


Рис. 85.

При помощи сдвига, направление которого будет находиться в одной из плоскостей симметрии взятой комбинации, причем плоскость сдвига будет, в свою очередь, перпендику-

лярна к этой плоскости симметрии, мы превратим комбинацию гексагональной призмы и пинакоида в комбинацию двух пинакоидов и ромбической призмы вида симметрии $L^2 Pc$ дигональной симметрической системы (рис. 86).

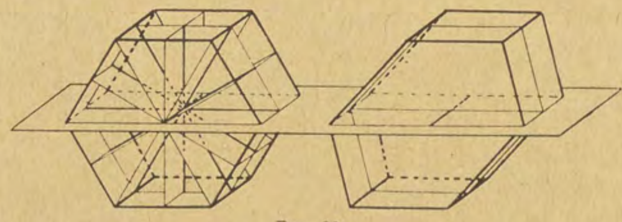


Рис. 86.

Наконец, применяя сдвиг косого положения по отношению ко всем элементам симметрии взятой гексагональной комбинации, получаем комбинацию 4-х пинакоидов вида симметрии *c* моногональной симметрической системы.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

II. НАЧАЛА УЧЕНИЯ О СИММЕТРИИ.

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

Находятся в печати:

ЛИНДОВ. Интегральное исчисление.
ШУМБУРГ. Туберкулез.
РОТ. Основы электротехники.
КРАНЦ. Тригонометрия на плоскости.
ЛЕБ. Биохимия.
МАКСВЕЛ. Материя и движение. С пред. А. Эйнштейна.
ЛОВАЧЕК. Использование водяной энергии.
ВУНДТ. Эллинское мировоззрение.
АРНДТ. Электрохимия.
ФАТЕР. Паровая машина. В двух частях.
ТЕЗИНГ. Экспериментальная биология.
ЗАКС. Строение и жизнь человеческого тела.
ЯКОВЕНКО. Соломон Маймон.
ЛЕМАН. Кинематография.
АСТЕР. Введение в психологию.
ЦУНЦ. Питание человека.
ДОРОШЕНКО. Очерки по истории славянских литератур. В трех частях.
БЕРНШТЕЙН. Видимые и невидимые лучи.
БАВИНК. Введение в органическую химию.
БАВИНК. Введение во всеобщую химию.
БАВИНК. Введение в неорганическую химию.
АНИЧКОВ. Западная литература и славянство.
ТЕЙХМАН. Оплодотворение и наследственность.
ШУМБУРГ. Венерические болезни.
РЮСТ. Искусственное изготовление веществ.
ПЕТЕР. Планеты.
ЯКОВЕНКО. Чаадаев.
КЮММЕЛЬ. Фотохимия.
АНИЧКОВ. История французской литературы.
КРАУЗЕ. Солнце.
КОБРАК. Уход за младенцем.
КАЙЗЕР. Азот и его утилизация.
ШКЛОВСКИЙ. Современная русская проза.
ГАМЕЛЬ. Основные понятия механики.
БИДЕРМАН. Взрывчатые вещества.
ШМИДТ. Число и форма.
ШВАРЦ. Освальд Шпенглер.

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50